آمادگی برای امتحان

ریاضی عمومی ۱

تألیف: دکتر مهدی نجفی‌خواه

عضو هیأت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

دیباچه

ریاضی عمومی یک اولین درس ریاضی برای دانشجویان رشته‌های فنی و مهندسی است. این درس دارای مواد درسی متعددی است و امکان تدریس اصولی آن در مدت زمان یک ترم شانزده یا هفده هفته‌ای و به صورت سه یا چهار ساعت در هفته مقدور نیست. شاید لااقل شش ساعت در هفته برای این امر لازم باشد. البته، این مشکل برای سایر دروس ریاضی دانشگاهها نیز وجود دارد. بر همین اساس بر آن شدیم تا با تهیهٔ سری کتابهای بهنام، این خلاء را پر کنیم. در هر یک از این کتابها چندین سری از مسایل امتحانی پایان ترم دانشگاههای مختلف حل می‌گردد. به نظر می‌رسد که از این گونه کتابها به دو منظور زیر می‌توان استفاده نمود:

۱) کتاب کمک آموزشی: برای این منظور، پس از استماع درس استاد و مطالعهٔ دقیق مفاد آموزش داده شده، به این کتاب مراجعه می‌شود. سپس مسایلی که در ارتباط با آن مباحث می‌باشند را انتخاب نموده و سعی می‌کند شخصاً حل کند. سپس، به قسمت حل آنها مراجعه نموده و ایرادات احتمالی را رفع می‌کند. چنانچه این کار قبل از حل مسایل مقرر شده توسط استاد انجام شود، ثمرهٔ بیشتری خواهد داشت.

۲) آمادگی برای امتحان و یا کنکور کارشناسی ارشد: برای این منظور، پیشنهاد می‌شود که خواننده فرصتی را برای امتحان در نظر بگیرد. به این ترتیب که ابتدا مسایل را مشخص کند، سپس برای هر تمرین ۱۵ دقیقه در نظر گرفته، مکانی مناسب را انتخاب نموده و از خود امتحان بعمل آورد. در پایان با مراجعه به قسمت پاسخها، نمرهٔ خود را معلوم کند. آخرین مرحله یافتن ایرادات احتمالی و کوشش در رفع آنها می‌باشد. دیده شده است که متأسفانه برخی از دانشجویان با آمادگی کافی در جلسهٔ امتحان حاظر نمی‌شوند و شکست می‌خورند. با انجام این پیشنهاد می‌توان از این مورد جلوگیری نمود.

روشن است که هر کتابی دارای امتیازات و معایب خاص به خود می‌باشد، و این کتاب نیز از این قاعده مستثنی نیست. بر همین اساس از خوانندهٔ محترم صمیمانه خواسته می‌شود که هر گونه پیشنهاد و یا انتقاد در خصوص این کتاب را به صورت کتبی به آدرس پستی «ایران، تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکدهٔ ریاضی، دکتر مهدی نجفی‌خواه» و یا به آدرس اینترنتی «m_nadjafikhahsun.iust.ac.ir» ارسال دارد.

جای آن دارد تا از زحمات فراوان سرکار خانم راحلهٔ بادرستانی به جهت تایپ این کتاب و نیز سرکار خانم سیده آزاده شیرافکن که در امر نسخه خوانی و ویرایش این اثر زحمات فراوانی را متحمل شدند، و همچنین از همکاری مجدانهٔ مسئولین محترم انتشارات ساحل اندیشه تهران در روند چاپ این اثر قدردانی شود.

مهدی نجفی خواه
بهار ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

امتحان اول

(۱) اگر α، β و γ سه عدد مختلط صادق در شرط $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=1$ باشند، تساوی زیر را ثابت کنید:

$$|\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma|=|\alpha+\beta+\gamma|$$

(۲) حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e}$ ب) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin(5x^2)}$

(۳) اگر $x^y+y^x=2xy$، مشتق y نسبت به x را در نقطهٔ $(2,2)$ محاسبه کنید.

(۴) اگر $\frac{\pi}{2}>\alpha\geq\beta>0$ باشد، نشان دهید که:

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leq\tan\alpha-\tan\beta\leq\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$$

(۵) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ب) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{2x^4+3x^2+1}$

(٦) به کمک انتگرال معین مقدار حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

(۷) مساحت محدود به منحنی زیر را محاسبه کنید:

$$C\ :\ x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ 0\leq t\leq 2\pi$$

(۸) آیا دنبالهٔ $x_n=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$، دنباله‌ای کوشی است؟ چرا؟

(۹) در همگرایی سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$ که در آن $a\in\mathbf{R}$ و $a\neq 0$ است، بحث کنید.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) برای اثبات حکم فوق می‌توان برابری توان دوم دو طرف تساوی را بررسی نمود. با توجه به اینکه برای هر عدد مختلط مانند z، رابطهٔ $|z|^2=z\bar{z}$ برقرار است، داریم:

$$\begin{aligned}
|\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma|^2 &= (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\overline{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)}\\
&= (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)(\overline{\alpha}\overline{\beta}+\overline{\alpha}\overline{\gamma}+\overline{\beta}\overline{\gamma})\\
&= \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\beta}+\alpha\beta\overline{\beta}\overline{\gamma}+\alpha\beta\overline{\gamma}\overline{\alpha}+\beta\gamma\overline{\alpha}\overline{\beta}+\beta\gamma\overline{\beta}\overline{\gamma}\\
&\quad+\beta\gamma\overline{\gamma}\overline{\alpha}+\gamma\alpha\overline{\alpha}\overline{\beta}+\gamma\alpha\overline{\beta}\overline{\gamma}+\gamma\alpha\overline{\gamma}\overline{\alpha}\\
&= (\alpha\overline{\alpha})(\beta\overline{\beta})+\alpha\overline{\gamma}(\alpha\overline{\alpha})+\beta\overline{\gamma}(\beta\overline{\beta})+\gamma\overline{\alpha}(\beta\overline{\beta})+(\beta\overline{\beta})(\gamma\overline{\gamma})\\
&\quad+\beta\overline{\alpha}(\gamma\overline{\gamma})+\gamma\overline{\beta}(\alpha\overline{\alpha})+\alpha\overline{\beta}(\gamma\overline{\gamma})+(\alpha\overline{\alpha})(\gamma\overline{\gamma})
\end{aligned}$$

حال با توجه به فرض $\alpha\overline{\alpha} = \beta\overline{\beta} = \gamma\overline{\gamma} = ۱$، تساوی بالا عبارت است از:

$$\begin{aligned} &= \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\gamma} + \gamma\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} + \gamma\overline{\beta} + \alpha\overline{\beta} + \gamma\overline{\gamma} \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}) = (\alpha+\beta+\gamma)(\overline{\alpha+\beta+\gamma}) = |\alpha+\beta+\gamma|^{۲} \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۲) الف) با فرض $y = \dfrac{x-e}{e}$ داریم $x = ey + e$. بنابراین، به کمک قضیهٔ هوپیتال داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to e} \frac{\ln(x) - ۱}{x-e} &= \lim_{y\to ۰} \frac{\ln(ey+e) - ۱}{ey} = \lim_{y\to ۰} \frac{\ln(y+۱) + \ln e - ۱}{ey} \\ &= \frac{۱}{e} \lim_{y\to ۰} \frac{\ln(y+۱)}{y} \overset{\text{هـ}}{=} \frac{۱}{e} \lim_{y\to ۰} \frac{\frac{۱}{y+۱}}{۱} = \frac{۱}{e} \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۲) ب) به کمک روابط هم‌ارزی $\sin x \sim x$، $\ln(۱+x) \sim x$ و $۱ - \cos x \sim \dfrac{x^{۲}}{۲}$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to ۰} \frac{\ln(\cos x)}{\sin(۵x^{۲})} &= \lim_{x\to ۰} \frac{\ln[۱ + (\cos(x) - ۱)]}{۵x^{۲}} \\ &= \lim_{x\to ۰} \frac{\cos x - ۱}{۵x^{۲}} = \lim_{x\to ۰} \frac{-\frac{x^{۲}}{۲}}{۵x^{۲}} = \frac{-۱}{۱۰} \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۳) با توجه به فرمول مشتق از تابع ضمنی و اینکه در این مسأله $f = x^y + y^x - ۲xy = ۰$، داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{yx^{y-۱} + y^x \ln(y) - ۲y}{x^y \ln(x) + xy^{x-۱} - ۲x}$$

حال کافی است که مقدار آن را در نقطهٔ $X_۰ = (۲, ۲)$ محاسبه کنید:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(۲,۲)} = -\frac{۴ + ۴\ln(۲) - ۴}{۴\ln(۲) + ۴ - ۴} = -۱$$

پاسخ مسأله ۴) برای پاسخ به این مسأله از قضیهٔ لاگرانژ برای تابع $f(x) = \tan x$ در فاصلهٔ $[\beta; \alpha]$ استفاده می‌کنیم. پس:

$$\exists c \in (\beta; \alpha) : \tan\alpha - \tan\beta = \frac{۱}{\cos^{۲} c}(\alpha - \beta)$$

از طرفی، چون $y = \cos x$ بر فاصلهٔ $\left(۰; \dfrac{\pi}{۲}\right)$ نزولی است، پس $y = \dfrac{۱}{\cos^{۲} x}$ بر آن فاصله صعودی می‌باشد و لذا از $۰ < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{۲}$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{۱}{\cos^{۲}\beta} < \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{\cos^{۲}\beta} < \tan\alpha - \tan\beta < \frac{\alpha-\beta}{\cos^{۲}\alpha}$$

روشن است که حالت $\alpha = \beta$، به تساوی سه عبارت بالا می‌انجامد.

پاسخ مسأله ۵) الف) به منظور استفاده از روش جزء به جزء، فرض می‌کنیم $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ و $dv = dx$. در نتیجه:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \end{aligned}$$

بنابراین $2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$، و یا اینکه:

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

پاسخ مسأله ۵) ب) از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{2x^4 + 3x^2 + 1} &= \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(2x^2 + 1)} \\ &= \int \left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{-1}{2x^2 + 1}\right) dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{2x^2 + 1} \\ &= \arctan x - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x) + C \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۶) این حد را به انتگرال معین تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}}\right) \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 0}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + k\frac{1 - 0}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x} = \ln 2 \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) با استفاده از فرمول محاسبهٔ مساحت محدود به یک منحنی پارامتری، داریم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right\} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{[a\cos^3 t][3a\sin^2 t\cos t] - [a\sin^3 t][-3a\cos^2 t\sin t]\right\} dt \\ &= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)(\cos^2 t\sin^2 t)dt \end{aligned}$$

$$= \frac{۳a^۲}{۲}\int_۰^{۲\pi}(\sin t\cos t)^۲ dt = \frac{۳a^۲}{۸}\int_۰^{۲\pi}\sin^۲(۲t)dt = \frac{۳}{۸}\pi a^۲$$

پاسخ مسأله ۸) ثابت می‌کنیم که این سری در شرط کوشی صدق می‌کند، و بنابراین همگرا می‌باشد. برای این منظور، فرض می‌کنیم $n < m$ و در این صورت:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= \left|\frac{\sin(n+۱)}{۲^{n+۱}} + \frac{\sin(n+۲)}{۲^{n+۲}} + \cdots + \frac{\sin(m)}{۲^m}\right| \\ &\le \frac{|\sin(n+۱)|}{۲^{n+۱}} + \frac{|\sin(n+۲)|}{۲^{n+۲}} + \cdots + \frac{|\sin(m)|}{۲^m} \\ &\le \frac{۱}{۲^{n+۱}} + \frac{۱}{۲^{n+۲}} + \cdots + \frac{۱}{۲^m} \\ &= \frac{۱}{۲^{n+۱}} \times \frac{۱-(\frac{۱}{۲})^{m-n}}{۱-\frac{۱}{۲}} < \frac{۱}{۲^n} \end{aligned}$$

پس برای اینکه $|x_m - x_n| < \varepsilon$، کافی است که $\frac{۱}{۲^n} < \varepsilon$ یا $n > -\frac{\ln\varepsilon}{\ln ۲}$.

پاسخ مسأله ۹) از آزمون ریشه برای سری‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left[\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n^۳}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{n^۲} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[۱+(\cos\left(\frac{a}{n}\right)-۱)\right]^{\frac{۱}{\cos\left(\frac{a}{n}\right)-۱}\times\frac{\cos(\frac{a}{n})-۱}{(\frac{۱}{n})^۲}} \\ &= \exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{a}{n}\right)-۱}{(\frac{۱}{n})^۲}\right] = \exp\left(-\frac{a^۲}{۲}\right) = e^{-a^۲/۲} \end{aligned}$$

چون $\ell < ۱$، پس سری مذکور همگرا می‌باشد (توجه شود که $\exp x := e^x$).

امتحان دوم

(۱) مطلوبست محاسبهٔ حد قسمت (الف). سپس به دلخواه یکی از حدود (ب) یا (ج) را انتخاب کرده، حل نمائید:

$$\text{الف)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}\,dx}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}\,dx}$$

$$\text{ب)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1+ax)(1+bx)}-1}{x}\qquad \text{ج)}\quad \lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$$

(۲) قضیهٔ رل و مقدار میانگین را بیان نموده، سپس قضیهٔ مقدار میانگین را اثبات نموده و درستی آن را برای تابع زیر در فاصله $[0,2]$ بررسی کنید:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & 0\le x\le 1\\[2mm] \dfrac{1}{x} & x>1\end{cases}$$

(۳) از میان انتگرالهای زیر فقط دو تای آنها را محاسبه نمائید:

$$\text{الف)}\ \int\frac{\cosh x}{\cosh x+\sinh x}dx\qquad \text{ب)}\ \int\frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}dx\qquad \text{ج)}\ \int\arctan(\sqrt{x})dx$$

(۴) همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره زیر را بررسی کنید:

$$\int_0^1\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}dx$$

(۵) حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به $y=\cos x$، $y=\sin x$ و $0\le x\le\frac{\pi}{4}$. حول محور x ها را بدست آورید:

(٦) همگرایی و یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+2)}$$

(۷) شعاع و بازهٔ همگرایی سری توانی زیر را بدست آورده، همگرایی یاواگرایی سری را در نقاط انتهایی بررسی نمائید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}(2x-1)^n$$

(۸) الف) ریشه‌های معادلهٔ $z^4+z^2+1=0$ را بدست آورید.

ب) تحقیق نمائید حاصلضرب ریشه‌های فوق برابر واحد است.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) الف) چون حد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌انجامد، از قاعده هوپیتال برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}dx}{\displaystyle\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}dx}\overset{\text{هـ}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{\tan x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}\sqrt{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\times\dfrac{\sin^{\frac{1}{2}}x}{\cos^{\frac{1}{2}}x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}\times\sin^{\frac{1}{2}}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x\cdot\sin^{\frac{1}{2}}x}{\cos^{\frac{1}{2}}x\cdot\sin^{\frac{1}{2}}x}=\lim_{x\to 0}\cos^{\frac{5}{2}}x=1$$

پاسخ مسأله ۱) ب) چون حد به حالت ابهام $\frac{0}{0}$ می‌انجامد برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1+ax)(1+bx)}-1}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{[\sqrt{(1+ax)(1+bx)}-1][\sqrt{(1+ax)(1+bx)}+1]}{x(\sqrt{(1+ax)(1+bx)}+1)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)(1+bx)-1}{x(\sqrt{(1+ax)(1+bx)}+1)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{a+b+abx}{\sqrt{(1+ax)(1+bx)}+1}=\frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۱) ج) چون $y=\ln x$ تابعی پیوسته است با فرض $A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\ln A &= \lim_{x\to\pi/2}\tan x\cdot\ln(\sin x)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(\sin x)}{\cot x}\\
&\overset{\text{هـ}}{=}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to\pi/2}\big(-\sin x\cos x\big)=0
\end{aligned}$$

پس $\ln A=0$ و بنابراین $A=e^0=1$.

پاسخ مسأله ۲) **قضیهٔ رول:** اگر تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته، بر بازهٔ $(a;b)$ مشتقپذیر باشد و $f(a)=f(b)$. در این صورت حداقل یک $c\in(a;b)$ ای وجود دارد که $f'(c)=0$.

اثبات: سه حالت در نظر می‌گیریم:

الف) لااقل یک $x_\circ \in (a;b)$ ای وجود دارد که $f(x_\circ) > f(a)$.

ب) لااقل یک $x_\circ \in (a;b)$ ای وجود دارد که $f(x_\circ) < f(a)$.

ج) به ازاء هر $x_\circ \in (a;b)$ ای $f(x_\circ) = f(a)$

در هر سه مورد، چون $y = f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته است، بنابراین، مسألهٔ اکسترموم $y = f(x)$ بر $[a;b]$ دارای جواب است. در حالت اول، ماکزیموم $y = f(x)$ بر $[a;b]$ از $f(a)$ بزرگتر است و در بازهٔ باز $(a;b)$ رخ می‌دهد. پس، یک $c \in (a;b)$ ای وجود دارد که به ازاء آن $f'(c) = \circ$. حالت (ب) شبیه حالت (الف) می‌باشد. در حالت (ج) تابع ثابت است و بنابراین مشتق آن در تمام نقاط $(a;b)$ صفر است.□

قضیهٔ لاگرانژ: اگر تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته و بر بازهٔ باز $(a;b)$ مشتقپذیر باشد، در این صورت حداقل یک $c \in (a;b)$ ای وجود دارد که

$$f(b) - f(b) = f'(c)(b-a)$$

اثبات: فرض کنیم، به ازاء $x \in [a;b]$،

$$g(x) = (b-a)f(x) - x(f(b) - f(a))$$

در این صورت $y = g(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته و بر $(a;b)$ مشتقپذیر است. بعلاوه

$$g(a) = g(b) = bf(a) - af(b)$$

لذا، بنا به قضیهٔ رول، $c \in (a;b)$ ای وجود دارد که $g'(c) = \circ$. اما

$$g'(x) = (a-b)f'(x) - (f(b) - f(a))$$

بنابراین، $c \in (a;b)$ ای وجود دارد که به ازای آن $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.□

در مورد درستی لاگرانژ برای تابع و دامنهٔ داده شده حد چپ و راست تابع مورد نظر را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to ۱^-} f(x) &= \lim_{x\to ۱^-} \frac{۳ - x^۲}{۲} = ۱ \\
\lim_{x\to ۱^+} f(x) &= \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{x} = ۱
\end{aligned}$$

پس تابع $y = f(x)$ در فاصله $[\circ, ۲]$ پیوسته است.

در مورد مشتق‌پذیری داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \circ < x < ۱ \\ \frac{-۱}{x^۲} & x > ۱ \end{cases}$$

و در مورد $x = ۱$ می‌توان نوشت:

$$f'(۱^-) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{\frac{۳ - x^۲}{۲} - ۱}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۱ + x}{-۲} = -۱$$
$$f'(۱^+) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\frac{۱}{x} - ۱}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{-۱}{x} = -۱$$

بنابراین $f'(۱) = -۱$، $y = f(x)$ بر فاصلهٔ $(۰, ۲)$ مشتق‌پذیر است. بنابراین شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است. بنابراین حداقل یک نقطه مانند $c \in (۰, ۲)$ وجود دارد بطوریکه:

$$\frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲} = f(۲) - f(۰) = f'(c)(b - a) = f'(c)(۲ - ۰)$$

پس $f'(c) = \frac{-۱}{۲}$. ولی چون تابع f' دو ضابطه‌ای است بسته به وضعیت c نسبت به عدد (۱) دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) $$\begin{cases} f'(c) = \frac{-۱}{۲} \\ ۰ < c \le ۱ \end{cases} \Rightarrow -c = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow c = \frac{۱}{۲}$$

ب) $$\begin{cases} f'(c) = \frac{-۱}{۲} \\ ۱ \le c < ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{-۱}{c^۲} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow c = \pm\sqrt{۲} \Rightarrow c = \sqrt{۲}$$

در اینجا $c = -\sqrt{۲}$ قابل قبول نمی‌باشد زیرا متعلق به فاصلهٔ داده شده نمی‌باشد. بنابراین حکم قضیه برای $c = \frac{۱}{۲}$ و $c = \sqrt{۲}$ برقرار می‌باشد.

پاسخ مسأله ۳) الف) با توجه به تعریف سینوس و کسینوس هیپربولیک داریم:

$$\int \frac{\cosh x}{\cosh x + \sinh x} dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{۲e^x} dx$$
$$\overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۲} \int (۱ + e^{-۲x}) dx = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}e^{-۲x} + C$$

توضیح اینکه در (۱)، صورت را بر مخرج تقسیم نموده‌ایم.

پاسخ مسأله ۳) ب) برای حل از تغییر متغییر $u = ۱ + \ln x$ استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم $x = e^{u-۱}$، $dx = e^{u-۱} du$ و

$$\int \frac{\ln x}{(۱ + \ln x)^۲} dx = \int \frac{u - ۱}{u^۲} e^{u-۱} du = e^{-۱} \int \frac{e^u (u - ۱)}{u^۲} du$$
$$= e^{-۱} \int \frac{e^u}{u} du + e^{-۱} \int \frac{-e^u}{u^۲} du$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-1}\int \frac{e^u}{u}du + e^{-1}\int e^u d(\frac{1}{u})\\
&= e^{-1}\int \frac{e^u}{u}du + e^{-1}\left\{e^u \times \frac{1}{u} - \int \frac{e^u}{u}du\right\}\\
&= e^{-1}e^u\frac{1}{u} + C = e^{u-1}\times\frac{1}{u} + C = \frac{x}{\ln x + 1} + C
\end{aligned}
$$

$(*)$ توجه کنید که برای حل $\int \frac{-e^u}{u^2}du$ از قاعده جزء به جزء استفاده کرده‌ایم.

پاسخ مسأله ۳) ج) برای حل از قاعدهٔ جزء به جزء استفاده می‌کنیم داریم:

$$
\left\{\begin{array}{l} u = \arctan(\sqrt{x}) \\ dv = dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = \frac{dx}{2\sqrt{x}(x+1)} \\ v = x \end{array}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
\int \arctan(\sqrt{x})dx &= \int u\cdot dv = uv - \int vdu\\
&= x\arctan(\sqrt{x}) - \int x\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}(x+1)}
\end{aligned}
$$

با فرض $t=\sqrt{x}$ داریم: $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$. پس:

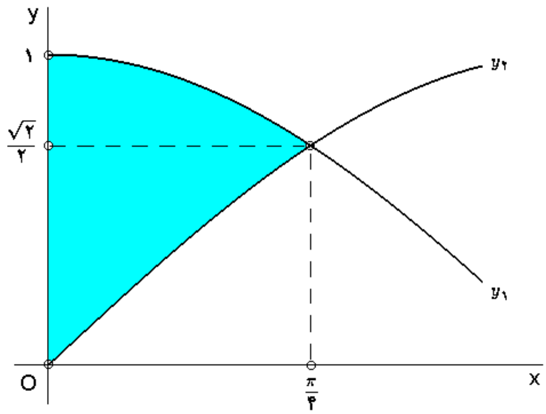
$$
\begin{aligned}
&= x\arctan(\sqrt{x}) - \int\frac{t^2dt}{1+t^2} = x\arctan(\sqrt{x}) - \int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\\
&= x\arctan(\sqrt{x}) - t + \arctan(t) + C\\
&= x\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + C = (x+1)\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C
\end{aligned}
$$

پاسخ مسأله ۴) با توجه به اینکه $|\sin\alpha| \leq 1$ به ازای هر α داریم:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}dx\right| &= \left|\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}dx\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1\frac{|\sin(\frac{1}{x})|}{\sqrt{x}}dx\\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2
\end{aligned}
$$

چون انتگرال مورد نظر همگرای مطلق است، همگرا نیز می‌باشد.

پاسخ مسأله ۵) با توجه به شکل ۱ کافی است حجم حاصل از دوران منحنی $y_1 = \cos x$ حول محور x ها را محاسبه کرده و حجم حاصل از دوران منحنی $y_2 = \sin x$ حول محور x ها



شکل ۱: مسألهٔ ۵ از امتحان دوم

را از آن کسر نمائیم $V = V_۱ - V_۲$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} y_۱^۲ dx - \pi \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} y_۲^۲ dx = \pi \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} (\cos^۲ x - \sin^۲ x) dx \\ &= \pi \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \cos(۲x) dx = \pi \left[\frac{۱}{۲} \sin(۲x) \right]_۰^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ٦) چون درجهٔ مخرج یک واحد از درجه صورت بیشتر است و سری شبیه سری هارمونیک $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ است، لذا آنرا با این سری مقایسه می‌کنیم.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n+۳}{n(n+۲)}}{\frac{۱}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+۳}{n+۲} = \lim_{n \to \infty} \frac{۱+\frac{۳}{n}}{۱+\frac{۲}{n}} = ۱$$

پس چون $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگرا است. بنابه آزمون مقایسهٔ سری‌های عددی، سری داده شده نیز واگرا است.

پاسخ مسأله ۷) با فرض $y = ۲x - ۱$ می‌توان نوشت $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۴^n} y^n$. این یک سری توانی با ضریب جملهٔ n ام $a_n = \frac{n}{۴^n}$ است. بنابراین اگر R شعاع همگرایی این سری باشد، آنگاه:

$$\frac{۱}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+۱}{۴^{n+۱}}}{\frac{n}{۴^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+۱}{۴n} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow R = ۴$$

حال اگر $|y| < ۱$ ($|۲x - ۱| < ۱$ یا «$x > ۰$ و $x < ۱$»)، آنگاه سری همگرا است. و اگر $|y| > ۱$ ($|۲x - ۱| > ۱$ یا $x < ۰$ ($x > ۱$ آنگاه سری واگرا می‌باشد. بنابراین، تنها حالت باقی‌مانده $|y| = ۱$ ($x = ۰$ یا $x = ۱$) است. سری داده شده به ازای $x = ۱$ برابر $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۴^n}$ است. که این یک سری همگرا می‌باشد. برای این مطلب کافیست توجه کنیم همواره $n \leq ۳^n$ است و لذا داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۴^n} \leq \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۳^n}{۴^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۳}{۴})^n$$

که سری آخر، یک سری هندسی با قدر نسبت کمتر از ۱ می‌باشد و چون از سری اخیر بزرگتر می‌باشد، پس $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۴^n}$، یک سری همگرا می‌باشد.

سری داده شده به ازای $x = ۰$ برابر $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{n}{۴^n}$ است، که این یک سری نوسانی است. بنا به آزمون لایبنیتز، همگرایی این سری معادل است با نزولی بودن دنبالهٔ $x_n = \frac{n}{۴^n}$ و صفر شدن حد آن بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} x_{n+۱} &\leq x_n \Leftrightarrow \frac{n+۱}{۴^{n+۱}} \leq \frac{n}{۴^n} \Leftrightarrow n+۱ \leq ۴n \Leftrightarrow ۱ \leq ۳n \\ ۰ &\leq \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{۴^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{۳^n}{۴^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{۳}{۴})^n = ۰ \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌گیریم که سری داده شده فقط و فقط به ازای $x \in [۰, ۱]$ همگرا است.

پاسخ مسأله ۸) فرض می‌کنیم $w = z^۲$، آنگاه معاده داده شده را می‌توان بصورت معادله درجه دوم $w^۲ + w + ۱ = ۰$ بازنویسی نمود. بنابراین:

$$w = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ - ۴}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} w_۱ = \frac{-۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} i \\ w_۲ = \frac{-۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} i \end{cases}$$

بنا به تعریف مزدوج دو عدد مختلط، مشاهده می‌شود که $w_۱$ و $w_۲$ مزدوج همدیگر هستند پس $w_۱ = \overline{w_۲}$. برای حل معادلهٔ $w = z^۲$ می‌بایست از قضیه دموآور استفاده کنیم. بنابراین فرم

مثلثاتی یا نمایی w_1 و w_2 را تعیین می‌کنیم. برای این منظور مدول (قدر مطلق) و آرگومان (فاز) w_1 و w_2 را تعیین می‌کنیم.

نکته: با توجه به مقادیر x و y در عدد مختلط $z = x + iy$ (ربع اول تا چهارم). برای بدست آوردن، آرگومان θ توجه به این نکته که z در کدامیک از ۴ ناحیه واقع می‌شود بسیار مهم است.

$$r = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r_1 = \sqrt{(\frac{-1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$$

و چون w_1 و w_2 مزدوج همدیگر هستند پس $r_1 = r_2$ می‌باشد. برای تعیین آرگومان داریم:

$$\left.\begin{array}{r} arg(w_1) = \arctan\left(\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = \dfrac{-\pi}{3} \\ \text{اما } w_1 \text{ در ناحیه دوم واقع است} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

و چون w_1 و w_2 مزدوج همدیگرند بنابراین: $\theta_2 = \dfrac{-2\pi}{3}$.

اما می‌دانیم که به ترتیب از چپ به راست نمایش دکارتی و قطبی عدد مختلط z بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} z &= x + yi = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ w_1 &= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1e^{\frac{2\pi}{3}i} = 1\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ w_2 &= \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1e^{-\frac{2\pi}{3}i} = 1\left[\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

اما بنابه فرض $w = z^2$ است برای تعیین z با استفاده از قضیه دموآور و با توجه به اینکه هر معادلهٔ درجه n دارای n ریشه می‌باشد حالتهای $k = 0, 1$ را در نظر می‌گیریم:

$$w = z^2 \Rightarrow z = w^{1/2} = \sqrt{w}$$

بنابراین برای تعیین z داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{w_1} &= \sqrt{1e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \sqrt{1}e^{\frac{\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)i}{2}} = e^{\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)i} \\ &= \begin{cases} e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \text{اگر } k = 0 \\ e^{\frac{4\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \text{اگر } k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sqrt{w_2} = \sqrt{1e^{\frac{-2\pi}{3}i}} = \sqrt{1}e^{\frac{(\frac{-2\pi}{3}+2k\pi)i}{2}} = e^{\left(-\frac{\pi}{3}+k\pi\right)i}$$

$$= \begin{cases} e^{\frac{-\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \text{اگر } k=0 \\ e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \text{اگر } k=1 \end{cases}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \left\{e^{\frac{\pi}{3}i},\ e^{\frac{4\pi}{3}i},\ e^{\frac{-\pi}{3}i},\ e^{\frac{2\pi}{3}i}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

لازم به ذکر است که می‌توان ثابت نمود که اگر $x+iy$ یک جواب معادلهٔ $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ باشد که در آن x، y، $a_0 \neq 0$، a_1، ... و a_n اعداد حقیقی هستند، $x-iy$ نیز جواب معادله است.

به بیان ساده‌تر، ریشه‌های یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی، مزدوج یکدیگرند (برای اثبات می‌توانید از فرم نمایی $re^{i\theta}$ استفاده کنید).

پاسخ مسأله ۸) ب) ثابت می‌شود که مجموع (S) و حاصلضرب (P)، ریشه‌های چندجمله‌ای $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ که در آن $a_0 \neq 0$ است از فرمولهای زیر بدست می‌آید:

$$S = \frac{-a_1}{a_0} \qquad P = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

پس در این مسألهٔ به خصوص $P = (-1)^4 \times \frac{1}{1} = 1$.

امتحان سوم

(۱) مکان هندسی نقاطی را در صفحهٔ مختلط بیابید که در رابطه زیر صدق کند.

$$|\mathrm{Im}(z+i)| \leq ۱$$

(۲) هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} (\tan x)^{\tan(۲x)}$ ب) $\lim_{x \to ۰} x \left[\frac{۱}{x}\right]$

نماد [ ]، به معنای کروشه و یا جزء صحیح می‌باشد.

(۳) بسط مک لورن تابع $f(x) = \ln \sqrt{(۱-x^۲)^x}$ را بیابید.

(۴) اولاً: در پیوستگی و مشتق پذیری تابع زیر بحث کنید::

$$f(x) = \begin{cases} e^{-۱/x^۲} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

ثانیاً: نشان دهید که هر تابع مشتق‌پذیر، پیوسته است.

(۵) ثابت کنید که معدلهٔ $x = ۲^{-x}$ یک و تنها یک ریشه در بازهٔ $(۰, ۱)$ دارد.

(٦) مقدار هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_۰^۴ |x-۱|\, dx$ ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^۲+۲x+۲}$

(۷) دو مورد از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{x^۲\, dx}{\sqrt{x^۲+۴}}$ ب) $\int x^۲ \sin(\ln x)\, dx$ ج) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(۱-x)}}\, dx$

(۸) در همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسرهٔ $\int_۰^{\infty} \frac{dx}{x^۴+۴}$ بحث کنید.

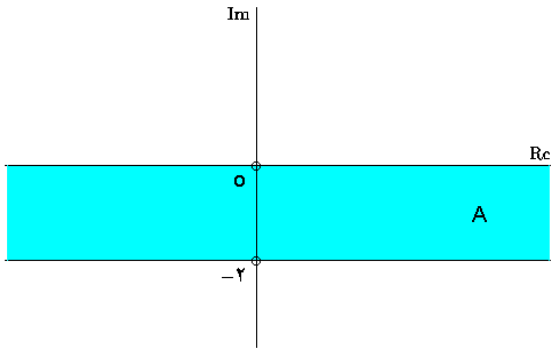
(۹) مشخص کنید که به ازای کدام مقادیر از x، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(\frac{x}{n})}{n^{۳/۲}}$ همگرا است.

(۱۰) مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی نمایش تابع $y = x^۲(۴-x^۲)$ و محور x ها را محاسبه کنید.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) فرض کنیم $z = x+iy$ و $|\mathrm{Im}(z+i)| \leq ۱$؛ بنابراین:

$$|\mathrm{Im}(x+i(y+۱))| \leq ۱ \;\Leftrightarrow\; |y+۱| \leq ۱ \;\Leftrightarrow\; -۱ \leq y+۱ \leq ۱$$



شکل ۲: مجموعهٔ A

بنابراین $-۲ \leq y \leq ۰$ است و مجموعهٔ مورد نظر عبارتست از:

$$A = \{x + iy \mid -۲ \leq y \leq ۰\}$$

به شکل ۲ توجه نمائید.

پاسخ مسأله ۲) الف) این حد به حالت مبهم ۱^{∞} می‌انجامد. با فرض $A = (\tan x)^{\tan(۲x)}$، و با lnگیری از طرفین داریم، حد مورد نظر عبارتست از:

$$\begin{aligned}
\ln A &= \lim_{x\to\pi/۴} \ln y = \lim_{x\to\pi/۴} \tan(۲x)\ln(\tan x) \\
&= \lim_{x\to\pi/۴} \frac{\ln(\tan x)}{\cot(۲x)} \stackrel{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to\pi/۴} \left(\frac{\frac{۱/\cos^۲ x}{\tan x}}{\frac{-۲}{\sin^۲(۲x)}}\right) \\
&= \lim_{x\to\pi/۴} \left(\frac{\frac{۱}{\sin x \cos x}}{\frac{-۲}{۴\sin^۲ x \cos^۲ x}}\right) = \lim_{x\to\pi/۴} (-۲\sin x\cos x) = -۱
\end{aligned}$$

بنابراین $\ln A = -۱$ و در منتیجه $A = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$.

پاسخ مسأله ۲) ب) به ازای هر $x \neq ۰$ داریم: $\frac{۱}{x} \le \left[\frac{۱}{x}\right] < \frac{۱}{x} + ۱$. اگر $x > ۰$، آنگاه با ضرب کردن طرفین نامساویها در x، داریم: $۱ \le x\left[\frac{۱}{x}\right] < ۱ + x$ و در نتیجه:

$$۱ = \lim_{x\to ۰+} (۱) \le \lim_{x\to ۰+} x\left[\frac{۱}{x}\right] \le \lim_{x\to ۰+} (۱ + x) = ۱$$

و به صورت مشابه اگر $x < ۰$، آنگاه با ضرب طرفین در x، داریم: $۱ \le x\left[\frac{۱}{x}\right] < x + ۱$ و در نتیجه:

$$۱ = \lim_{x\to ۰-} (۱ + x) \le \lim_{x\to ۰-} x\left[\frac{۱}{x}\right] \le \lim_{x\to ۰-} (۱) = ۱$$

بنابراین حد چپ و حد راست تابع $x\left[\frac{۱}{x}\right]$ در نقطه $x = ۰$ موجود و برابر یک می‌باشند. در نتیجه، حد تابع $x\left[\frac{۱}{x}\right]$ در $x = ۰$ نیز موجود و برابر یک می‌باشند.

پاسخ مسأله ۳) با توجه به اینکه بسط مک لورن $\ln(x + ۱)$ برابر است با:

$$\ln(۱ + x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \cdots + (-۱)^{n+۱}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(\sqrt{(۱ - x^۲)^x}) = \ln(۱ - x^۲)^{\frac{x}{۲}} = \frac{x}{۲}\ln(۱ - x^۲) \\
&= \frac{x}{۲}\Big\{(-x^۲) - \frac{۱}{۲}(-x^۲)^۲ + \frac{۱}{۳}(-x^۲)^۳ - \cdots \\
&\qquad \cdots + (-۱)^{n+۱}\frac{۱}{n}(-x^۲)^n + \cdots\Big\} \\
&= \frac{x}{۲}\Big\{-x^۲ - \frac{۱}{۲}x^۴ - \frac{۱}{۳}x^۶ - \cdots - \frac{۱}{n}x^{۲n} - \cdots\Big\} \\
&= -\frac{x^۳}{۲} - \frac{x^۵}{۴} - \frac{x^۷}{۶} - \cdots - \frac{x^{۲n+۱}}{۲n} - \cdots
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۴) الف) با فرض $y = \frac{۱}{x}$، داریم:

$$\lim_{x\to ۰\pm} f(x) = \lim_{x\to ۰\pm} e^{-۱/x^۲} = \lim_{y\to\pm\infty} e^{-y^۲} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{۱}{e^{y^۲}} = ۰ = f(۰)$$

بنابراین، f در $x=0$ پیوسته است. برای بررسی مشتق‌پذیری اگر $x\neq 0$، داریم:

$$f'(x)=\left\{e^{-1/x^2}\right\}'=\left(\frac{-1}{x^2}\right)'e^{-1/x^2}=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$$

و بطور مشابه اگر $x=0$ باشد داریم:

$$f'(0^{\pm})=\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{e^{-1/x^2}-0}{x-0}=\lim_{y\to\pm\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{هـ}}{=}\lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{2ye^{y^2}}=0$$

بنابراین f در $x=0$ نیز مشتق‌پذیر می‌باشد. پس:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

پاسخ مسأله ۴) ب) اگر $y=f(x)$ در $x=x_0$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابعی مانند $f'(x)$ وجود دارد که حد کسر $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ در نقطهٔ $x=x_0$ برابر $f'(x_0)$ است. بنابراین:

$$\forall\,\epsilon\;\exists\,\delta\;\forall\,x\;\left(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\epsilon\right)$$

و یا بطور معادل:

$$\forall\,\epsilon\;\exists\,\delta\;\forall\,x\;\big(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|<\epsilon|x-x_0|\big)$$

پس به ازای $\epsilon=\frac{1}{2}f'(x_0)$، $\delta>0$ طوری وجود دارد که اگر $0<|x-x_0|<\delta$ آنگاه:

$$-\epsilon(x-x_0)<f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)<\epsilon(x-x_0)$$

$$\left(\frac{1}{2}f'(x_0)\right)(x-x_0)<f(x)-f(x_0)<\left(\frac{3}{2}f'(x_0)\right)(x-x_0)$$

بنابراین اگر $x\to x_0$ آنگاه $\lim(x-x_0)=0$ و لذا بنابه قضیه ساندویچ، حد عبارت وسط نیز صفر است و $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ بنابراین f در $x=x_0$ پیوسته می‌باشد.

پاسخ مسأله ۵) فرض می‌کنیم $f(x)=2^{-x}-x$، چون f بر بازهٔ $[0,1]$ پیوسته است (توجه کنید که توابع چند جمله‌ای و توانی بر کل $\mathbf{R}$ پیوسته‌اند) و $f(0)f(1)=(1-0)(\frac{1}{2}-1)<0$، نقطه‌ای مانند $c\in(0,1)$ وجود دارد که $f(c)=0$. پس f لااقل یک ریشه بر بازهٔ $(0,1)$ دارد.

اگر f بیش از یک ریشه بر $(0,1)$ داشته باشد، مثلاً $0<x_1<x_2<1$، آنگاه چون f بر $[0,1]$ پیوسته و بر $(0,1)$ مشتق‌پذیر است، بنابه قضیهٔ رُل نقطه‌ای مانند $c\in(0,1)$ وجود دارد که $f'(c)=0$. یعنی $0<c<1$ و $-2^{-c}-1=0$ اما $-2^{-c}+1=0$ محال است. پس فرض وجود بیش از یک ریشه برای f بر $(0,1)$ غلط است. بنابراین f، یک و تنها یک ریشه بر $(0,1)$ دارد.

پاسخ مسأله ٦) الف) چون تابع $y=|x-1|$ در $x=1$ تعییر ضابطه می‌دهد، داریم :

$$\int_0^4 |x-1|dx=\int_0^1 |x-1|dx+\int_1^4 |x-1|dx=\int_0^1 (1-x)dx+\int_1^4 (x-1)dx$$
$$=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(8-4-\frac{1}{2}+1\right)=5$$

پاسخ مسأله ٦) ب) بنابه تعریف انتگرال ناسره داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+1}$$
$$=\lim_{b\to\infty}[\arctan(x+1)]_{-b}^{b}=\lim_{b\to\infty}[\arctan(b+1)-\arctan(1-b)]$$
$$=\lim_{u\to+\infty}(\arctan u)-\lim_{v\to+\infty}\arctan(-v)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

پاسخ مسأله ۷) الف) برای حل از فرمول کاهش مرتبه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int\frac{P_m(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+k\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

برای تعیین ضرائب چندجمله‌ای $P_{m-1}(x)$ و عدد ثابت k از روش ضرائب مجهول استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}=(Ax+B)\sqrt{x^2+4}+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} &= (A)\sqrt{x^2+4}+(Ax+B)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}+\frac{k}{\sqrt{x^2+4}}\\ &= \frac{A(x^2+4)+(Ax+B)x+k}{\sqrt{x^2+4}}\end{aligned}$$

نتیجه اینکه $x^2=A(x^2+4)+(Ax+B)x+k$ یا

$$\left\{\begin{array}{l}1=2A\\ B=0\\ 4A+k=0\end{array}\right.\quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=\frac{1}{2}\\ B=0\\ k=-2\end{array}\right.$$

بنابراین:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}-2\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|$$

پاسخ مسأله ۷) ب) فرض می‌کنیم $t = \ln x$، پس $x = e^t$ و $dx = e^t dt$ پس:

$$I = \int x^{۲} \sin(\ln x) dx = \int (e^t)^{۲} \sin(t) e^t dt = \int e^{۳t} \sin t dt$$

با استفاده از روش جزء به جزء داریم: $u = e^{۳t}$ و $dv = \sin(t)dt$ پس: $du = ۳e^{۳t}dt$ و $v = -\cos t$ و لذا داریم:

$$I = (e^{۳t})(-\cos t) - \int (-\cos t)(۳e^{۳t}dt) = -e^{۳t}\cos t + ۳\int e^{۳t}\cos t dt$$

مجدداً، با فرض $u = e^{۳t}$ و $dv = \cos t dt$، داریم: $v = \sin t$ و $du = ۳e^{۳t}dt$. در نتیجه

$$\begin{aligned} I &= -e^{۳t}\cos t + ۳\left\{(e^{۳t})(\sin(t)) - \int (\sin(t)(۳e^{۳t}dt)\right\} \\ &= -e^{۳t}\cos(t) + ۳e^{۳t}\sin(t) - ۹\int e^{۳t}\sin(t)dt = e^{۳t}(۳\sin t - \cos t) - ۹I \end{aligned}$$

بنابراین، با حل تساوی بالا بر حسب I داریم

$$I = \frac{۱}{۱۰} e^{۳t}\left(۳\sin(t) - \cos(t)\right) + C = \frac{۱}{۱۰} x^{۳}\left(۳\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C$$

پاسخ مسأله ۷) ج) فرض می‌کنیم $u = \arcsin(\sqrt{x})$؛ با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$du = \frac{dx}{۲\sqrt{x}\cdot\sqrt{۱-x}}$$

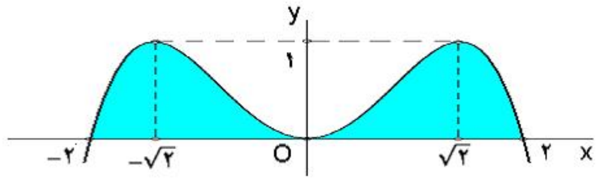
با جایگذاری در انتگرال می‌توان نوشت:

$$\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(۱-x)}} dx = \int \frac{u}{۲} du = \frac{u^{۲}}{۴} + C = \frac{۱}{۴}(\arcsin(\sqrt{x}))^{۲} + C$$

پاسخ مسأله ۸) چون $f(x) = \frac{۱}{x^{۴}+۴}$ تابعی مثبت است، کافی است ثابت کنیم که به ازای هر نقطه‌ای مانند $b > ۰$ آنگاه $\int_۰^b \frac{dx}{x^{۴}+۴}$ از بالا کراندار می‌باشد و سپس نتیجه بگیریم که انتگرال داده شده همگرا می‌باشد. اگر $b > ۱$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} \int_۰^b \frac{dx}{x^{۴}+۴} &= \int_۰^{۱} \frac{dx}{x^{۴}+۴} + \int_{۱}^b \frac{dx}{x^{۴}+۴} \\ &\leq \int_۰^{۱} \frac{dx}{x^{۴}+۴} + \int_{۱}^b \frac{dx}{x^{۲}+۱} = I + [\arctan x]_{۱}^b \\ &= I + \arctan b - \arctan ۱ < I + \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} \end{aligned}$$

که در اینجا $I = \int_۰^{۱} \frac{dx}{x^{۴}+۴}$، انتگرال معمولی است.



شکل ۳: ناحیهٔ خواسته شده در مسألهٔ ۱۰

پاسخ مسأله ۹) فرض کنیم سری را $f(x)$ بنامیم در این صورت $f(-x) = -f(x)$ بنابراین، همگرایی $f(x)$ به ازای $x > ۰$ با $f(-x)$ به یک معنی است. پس می‌توانیم فرض کنیم که به ازای $x \geq ۰$ نقطه‌ای مانند $n_۰$ وجود دارد به قسمی که $\pi > \frac{x}{n_۰} \geq ۰$، بنابراین می‌نویسیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(\frac{x}{n})}{n^{۳/۲}} = \sum_{n=۱}^{n_۰-۱} \frac{\sin(\frac{x}{n})}{n^{۳/۲}} + \sum_{n=n_۰}^{\infty} \frac{\sin(\frac{x}{n})}{n^{۳/۲}}$$

که مجموع اول متناهی می‌باشد. در مورد سری دوم، که یک سری با جملات مثبت است داریم:

$$\sum_{n=n_۰}^{\infty} \frac{\sin(\frac{x}{n})}{n^{۳/۲}} \leq \sum_{n=n_۰}^{\infty} \frac{۱}{n^{۳/۲}}$$

که سری سمت راست، یک سری توانی با توان $k = \frac{۳}{۲} > ۱$ می‌باشد، پس همگرا می‌باشد. بنابراین، به ازای هر $x \leq ۰$ (و لذا هر $x \geq ۰$) سری داده شده همگرا می‌باشد.

پاسخ مسأله ۱۰) ابتدا شرط $y = ۰$ (محل برخورد منحنی با محور x ها) را بررسی می‌کنیم:

$$x^۲(۴ - x^۲) = ۰ \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^۲ = ۰ \\ x^۲ = ۴ \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases}$$

اگر $-۲ \leq x \leq ۲$ آنگاه $y \geq ۰$ (که این مهم از روی شکل ۳ و یا جدول تعیین علامت مشخص می‌شود) و در غیر اینصورت $y \leq ۰$ است. بنابراین ناحیهٔ محدود شده به نمودار تابع و محور x ها برابر است با

$$A = \int_{-۲}^{۲} x^۲(۴ - x^۲)dx = \left[۴\frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۵}{۵}\right]_{-۲}^{۲} = \frac{۱۲۸}{۱۵}$$

امتحان چهارم

(۱) حدود زیر را بدست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin(\sqrt{x})dx}{x^3}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\tan x}$

(۲) مشتق تابع $y(x)$ را در صورتی پیدا کنید که

$$\arctan(\frac{y}{x}) = x^y + \cos(x^2 + y^2)$$

(۳) به یک مورد از دو سؤال زیر پاسخ دهید:

۱) قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ) را بیان کرده و اثبات نمائید و برای آن تعبیری هندسی ارائه دهید.

۲) قضیه رُل را بیان کرده و با استفاده از آن نشان دهید که معادلهٔ $x^3 + x - 1 = 0$ یک و فقط یک ریشه حقیقی دارد.

(۴) هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه نمائید:

الف) $\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx$ ب) $\int \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{4x^2+5}}$ ج) $\int \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$

(۵) از دو انتگرال توسعی (ناسره) زیر یک مورد را به دلخواه حل نمائید.

الف) $\int_1^3 \dfrac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ ب) $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^3}$

(۶) اگر $a > 0$ و $0 < t \leq 2\pi$ باشد،مطلوبست محاسبهٔ طول قوس منحنی زیر:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

(۷) اولاً، همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

ثانیاً، شعاع و فاصلهٔ همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ را بدست آورده و وضعیت سری را در نقاط انتهایی فاصله بررسی نمائید.

(۸) ریشه‌های ششم واحد را حساب کرده و تعبیری هندسی برای آن ارائه نمائید.

(۹) تابع $f(x) = (x - x_0)^n\,\varphi(x)$ را که در آن n عددی طبیعی بوده، $\varphi(x)$ در $x = x_0$ پیوسته و مخالف با صفر است را در نظر می‌گیریم. ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = x_0$ بررسی کنید.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) الف) به کمک قضیه هوپیتال داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin(\sqrt{x})}{x^3} &\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2x\sin(\sqrt{x})}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin(\sqrt{x})}{3x}\\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=+\infty\end{aligned}$$

توضیح اینکه $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ و $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=1$ می‌باشد.

پاسخ مسأله ۱) ب) فرض می‌کنیم $y=(\sin x)^{\tan x}$، در اینصورت اگر A حد y باشد، داریم:

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\tan x\ln(\sin x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\cot x}\overset{\text{هـ}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}(-\cos x\sin x)=0$$

بنابراین $\ln A=0$ پس: $A=e^0=1$.

پاسخ مسأله ۲) از فرمول مشتق تابع ضمنی استفاده می‌کنیم. اگر فرض شود:

$$f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-x^y-\cos(x^2+y^2)$$

آنگاه داریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}-yx^{y-1}+2x\sin(x^2+y^2)}{\frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}-x^y\ln x+2y\sin(x^2+y^2)}$$

پاسخ مسأله ۳) قسمت اول) برای مشاهدهٔ صورت قضیهٔ مقدار میانگین (یا لاگرانژ) و نیز اثبات آن به پاسخ مساله ۲ از امتحان دوم توجه شود. تعبیر هندسی آن چنین است:

فرض کنید تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ ترسیم شده است. خط گذرنده از نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ دارای شیب $m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ می‌باشد. مطابق قضیهٔ لاگرانژ، نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد که شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $(c,f(c))$ برابر با m است.

پاسخ مسأله ۳) قسمت دوم) برای مشاهدهٔ صورت قضیهٔ رول به قضیهٔ ۱.۵.۴ توجه شود.

تابع $f(x) = x^۳ + x - ۱$ را در نظر می‌گیریم. چون $f(۰) = -۱$ و $f(۱) = ۱$ و تابع f بر فاصلهٔ $[۰, ۱]$ پیوسته است، پس نقطه‌ای مانند $c \in (۰, ۱)$ وجود دارد که $f(c) = ۰$. یعنی f حداقل یک ریشه دارد.

برای اثبات اینکه f تنها یک ریشه دارد، با برهان خلف عمل می‌کنیم. فرض کنیم $a < b$ ریشه‌های تابع f باشند. چون تابع F بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر است و $f(a) = f(b)$، پس بنا به قضیهٔ رُل نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد که $f'(c) = ۰$ است. اما $f'(x) = ۳x^۲ + ۱$ که در بازهٔ مذکور همواره بزرگتر یا مساوی یک است که این با فرض $f'(c) = ۰$ متناقض است. پس می‌توانیم استنتاج کنیم که فرض وجود بیش از یک ریشه برای f غلط بوده و بنابراین f تنها یک ریشه دارد.

پاسخ مسأله ۴) الف) از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم. گیریم

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & e^{\alpha x} \\ dv & = & \cos(\beta x)dx \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} du & = & \alpha e^{\alpha x} \\ v & = & \frac{۱}{\beta}\sin(\beta x) \end{array} \right.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} I &= \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx = \int udv = uv - \int vdu \\ &= \frac{۱}{\beta}e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx \end{aligned}$$

مجدداً فرض می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^{\alpha x} \\ dv = \sin(\beta x)dx \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = \alpha e^{\alpha x} \\ v = \frac{-۱}{\beta}\cos(\beta x) \end{array} \right.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} I &= \frac{۱}{\beta}e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \frac{\alpha}{\beta}\left\{\frac{-۱}{\beta}e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx\right\} \\ &= \frac{۱}{\beta}e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \frac{\alpha}{\beta^۲}e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \frac{\alpha^۲}{\beta^۲}I \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\left(۱ + \frac{\alpha^۲}{\beta^۲}\right) I = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^۲}(\beta\sin(\beta x) + \alpha\cos(\beta x))$$
$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^۲ + \beta^۲}(\beta\sin(\beta x) + \alpha\cos(\beta x)) + C$$

پاسخ مسأله ۴) ب) فرض کنیم $u = \frac{۱}{x+۱}$ است و یا $x + ۱ = \frac{۱}{u}$ می‌باشد بنابراین $dx = \frac{-du}{u^۲}$ پس:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x+۱)\sqrt{۴x^۲+۵}} = \int \frac{\frac{-du}{u^۲}}{\frac{۱}{u}\sqrt{۴(\frac{۱}{u}-۱)^۲+۵}} \\ &= \int \frac{-du}{\sqrt{۹u^۲-۸u+۴}} = \int \frac{-du}{\sqrt{(۳u-\frac{۴}{۳})^۲+\frac{۲۰}{۹}}} \end{aligned}$$

اکنون فرض می‌کنیم $۳u - \frac{۴}{۳} = \sqrt{\frac{۲۰}{۹}}\sinh t$، بنابراین:

$$u = \frac{۲\sqrt{۵}\sinh(t)+۴}{۹} \Rightarrow du = \frac{۲\sqrt{۵}}{۹}\cosh(t)dt$$

$$I = \int \frac{-\frac{۲\sqrt{۵}}{۹}\cosh(t)\cdot dt}{\sqrt{\frac{۲۰}{۹}\sinh^۲(t)+\frac{۲۰}{۹}}} = \int \frac{-\frac{۲\sqrt{۵}}{۹}\cosh(t)\cdot dt}{\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}\sqrt{\sin h^۲(t)+۱}}$$

$$= \frac{-۱}{۳}\int \frac{\cosh(t)}{\cosh(t)}dt = \frac{-t}{۳} + C$$

که چون:

$$\sinh t = \sqrt{\frac{۹}{۲۰}}\left(۳u - \frac{۴}{۳}\right) = \sqrt{\frac{۹}{۲۰}}\left(۳\frac{۱}{x+۱} - \frac{۴}{۳}\right) = \frac{۵-۴x}{۲\sqrt{۵}(x+۱)}$$

بنابراین:

$$I = \frac{-۱}{۳}\text{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{۵}(۵-۴x)}{۱۰(x+۱)}\right) + C$$

پاسخ مسأله ۴) ج) از روش دوجمله‌ای دیفرانسیلی استفاده می‌کنیم. در اینجا با مقایسهٔ انتگرال داده شده با انتگرال $\int x^m(ax^n+b)^p dx$ داریم: $m = -۱$، $n = ۲$ و $p = \frac{۱}{۲}$ و از طرفی چون $\frac{m+۱}{n} = ۰$ است می‌توانیم فرض کنیم $ax^n + b = t^k$ که k مخرج P می‌باشد. یعنی $x^۲ - ۴ = t^۲$ پس $x \cdot dx = t \cdot dt$ و $x^۲ = t^۲ + ۴$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x^۲}\cdot x\cdot dx = \int \frac{\sqrt{t^۲}}{t^۲+۴}tdt = \int \frac{t^۲dt}{t^۲+۴} \\ &\overset{(۱)}{=} \int (۱ - \frac{۴}{t^۲+۴})dt = t - ۴\times\frac{۱}{۲}\arctan(\frac{t}{۲}) + C \end{aligned}$$

بنابراین:

$$I = \sqrt{x^۲-۴} - ۲\arctan(\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲-۴}) + C$$

توجه اینکه در (۱) صورت را بر مخرج تقسیم کرده‌ایم و در حل مسأله فوق از رابطه $\int \frac{du}{a^۲+u^۲} = \frac{۱}{a}\arctan(\frac{u}{a})$ سود جسته‌ایم.

پاسخ مسأله ۵) الف) انتگرال مورد نظر در $x = 1$ اشکال دارد پس بنا به تعریف انتگرال ناسرهٔ نوع دوم، داریم:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{du}{\sqrt{1 - (x-2)^2}} \overset{(1)}{=} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon - 1}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\arcsin u]_{\varepsilon - 1}^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\varepsilon - 1)\right) \\
&\overset{(2)}{=} \frac{\pi}{2} - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi
\end{aligned}$$

که در (۱) فرض شده است $u = x - 2$ و لذا $dx = du$ و $\begin{array}{c|cc} x & 1+\varepsilon & 3 \\ \hline u & \varepsilon - 1 & 1 \end{array}$ و در (۲) از پیوستگی $\arcsin x$ در $x = -1$ و برابر شدن حد آن با $-\frac{\pi}{2}$ استفاده نموده‌ایم.

پاسخ مسأله ۵) ب) با استفاده از تعریف انتگرال ناسرهٔ نوع اول داریم:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3} = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{dx}{1 + x^3}$$

برای انتگرال گیری از تابع $\frac{1}{x^3 + 1}$ باید مخرج آن را به شکل

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

تجزیه نمود. بنابراین فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \Rightarrow 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

و با حل دستگاه معادلات زیر:

$$A + B = 0, \qquad -A + B + C = 0, \qquad A + C = 1$$

خواهیم داشت: $A = \frac{1}{3}$ و $B = \frac{-1}{3}$ و $C = \frac{2}{3}$. یعنی:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{3} \int_0^a \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2 - x + 1}\right) dx \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{3} \left\{ \int_0^a \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{3}{2} \int_0^a \frac{dx}{x^2 - x + 1} \right\} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{a \to +\infty} \left\{ [\ln(x+1)]_0^a - \frac{1}{2} \left[\ln |x^2 - x + 1|\right]_0^a
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{۳}{۲}\int_{۰}^{a}\frac{dx}{(x-\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}}\Bigg\} \\
\overset{(۲)}{=} & \ \frac{۱}{۳}\lim_{a\to+\infty}\left\{\ln\left(\frac{(a+۱)^{۲}}{a^{۲}-a+۱}\right)+\left[\sqrt{۳}\arctan(\frac{\sqrt{۳}}{۳}(۲x-۱))\right]_{۰}^{a}\right\} \\
= & \ \frac{۱}{۳}\lim_{a\to+\infty}\left\{\frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{a^{۲}+۲a+۱}{a^{۲}-a+۱}\right)+\sqrt{۳}\arctan\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}(۲a-۱)\right)\right. \\
& \left.+\sqrt{۳}\arctan(\frac{\sqrt{۳}}{۳})\right\} \\
\overset{(۳)}{=} & \ \left(\frac{۱}{۶}\times ۰\right)+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۸}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}\pi
\end{aligned}
$$

توضیح اینکه در (۱) مشتق مخرج را در صورت جدا کرده‌ایم. و در (۲) از جدول انتگرال استفاده نموده‌ایم. در قسمت (۳) نیز از این واقعیت استفاده شده است که:

$$\lim_{x\to ۱}\ln x = ۰, \qquad \lim_{x\to+\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{۲}$$

پاسخ مسأله ۶) به کمک فرمول محاسبهٔ طول قوس یک منحنی پارامتری، داریم:

$$
\begin{aligned}
\ell &= \int_{a}^{b}\sqrt{[x'(t)]^{۲}+[y'(t)]^{۲}}dt=\int_{۰}^{۲\pi}\sqrt{(a-a\cos(t))^{۲}+(a\sin(t))^{۲}}dt \\
&= \int_{۰}^{۲\pi}\sqrt{۲a^{۲}-۲a^{۲}\cos(t)}dt=a\int_{۰}^{۲\pi}\sqrt{۲-۲\cos(t)}dt \\
&\overset{(۱)}{=} a\int_{۰}^{۲\pi}\sqrt{۴\sin^{۲}(\frac{t}{۲})}dt=۲a\int_{۰}^{۲\pi}\left|\sin(\frac{t}{۲})\right|dt \\
&\overset{(۲)}{=} ۲a\int_{۰}^{۲\pi}|\sin(u)|\,۲du\overset{(۳)}{=}۴a\int_{۰}^{\pi}\sin(u)\cdot du=۴a[-\cos u]_{۰}^{\pi}=۸a
\end{aligned}
$$

که در (۱) از فرمول $\sin^{۲}x=\frac{۱-\cos(۲x)}{۲}$ استفاده شده است. و در (۲) فرض شده است $u=\frac{t}{۲}$ و بنابراین $۲du=dt$ و در (۳) به علت مثبت بودن $\sin(u)$ در فاصلهٔ $[۰,\pi]$ قدر مطلق را با فرض مثبت بودن برداشته‌ایم.

پاسخ مسأله ۷) اولاً — الف) از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم. چون $x_n=\frac{n!}{n^n}$ است بنابراین:

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+۱}}{x_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+۱)!}{(n+۱)^{n+۱}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+۱)!}{n!(n+۱)^{n+۱}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+۱)n!}{n!(n+۱)^{n+۱}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+۱)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+۱}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+۱}{n}\right)^{-n} = \frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n} \overset{(۱)}{=} \frac{۱}{e}$$

که چون $e = ۲/۷ > ۱$ بنابراین $l = \frac{۱}{e} < ۱$ است و لذا سری همگرا می‌باشد.
توجه کنید که در (۱) از هم‌ارزی $\lim\limits_{n\to\infty}(۱+\frac{k}{n})^n = e^{۱/k}$، سود جسته‌ایم.

پاسخ مسأله ۷) اولاً — ب) از آزمون انتگرال برای سریها استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $f(x) = \frac{۱}{(x+۱)\sqrt{\ln(x+۱)}}$ در اینصورت f مثبت و نزولی است و بعلاوه:

$$\int_۱^\infty \frac{dx}{(x+۱)\sqrt{\ln(x+۱)}} = \lim_{b\to\infty}\int_۱^b \frac{dx}{(x+۱)\sqrt{\ln(x+۱)}}$$
$$\overset{(۱)}{=} \lim_{b\to\infty}\int_{\ln ۲}^{\ln(b+۱)} \frac{du}{\sqrt{u}} = \lim_{b\to\infty}\left[۲\sqrt{u}\right]_{\ln ۲}^{\ln(b+۱)} = ۲\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{\ln(b+۱)}-\sqrt{\ln ۲}\right) = +\infty$$

که در (۱) فرض شده است $u = \ln(x+۱)$. چون این انتگرال ناسره واگرا است، بنابراین سری داده شده نیز واگرا است. لازم به ذکر است که

$$\log_a ۰ = \begin{cases} -\infty & a > ۱ \\ \infty & a < ۱ \end{cases} \qquad \log_a \infty = \begin{cases} \infty & a > ۱ \\ -\infty & a < ۱ \end{cases}$$

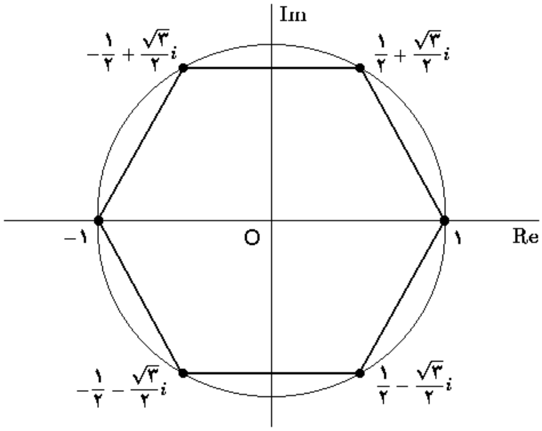
پاسخ مسأله ۷) ثانیاً: در این سری مجموع ضرائب عبارتست از $a_n = \frac{۱}{\sqrt{n}}$. پس اگر R شعاع همگرایی آن باشد داریم:

$$\frac{۱}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{۱}{\sqrt{n+۱}}}{\frac{۱}{\sqrt{n}}}\right| \overset{(۱)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}}\right) = ۱$$

پس $R = ۱$ می‌باشد. بنابراین اگر $|x| < ۱$ (یا بطور معادل $-۱ < x < ۱$) آنگاه سری همگرا است و اگر $|x| > ۱$ (یا بطور معادل $x < -۱$ یا $x > ۱$) باشد آنگاه سری واگرا است. اما اگر $|x| = ۱$، آنگاه $x = ۱$ یا $x = -۱$ می‌باشد . اگر $x = ۱$، آنگاه سری مذکور بصورت $\sum_{n=۱}^\infty \frac{۱}{\sqrt{n}}$ خواهد شد که یک سری نمایی با نمای $k = \frac{۱}{۲}$ است که چون $k < ۱$ می‌باشد پس سری واگرا است. اگر $x = -۱$، آنگاه سری بصورت $\sum_{n=۱}^\infty (-۱)^n \frac{۱}{\sqrt{n}}$ خواهد شد که بنا به آزمون لایبنیتز برای سریهای نوسانی همگرا است. زیرا $x_n = \frac{۱}{\sqrt{n}}$ نزولی و همگرا به صفر می‌باشد. بنابراین دامنهٔ همگرایی سری توانی داده شده عبارتست از: $[-۱, ۱)$.

پاسخ مسأله ۸) چون $۱e^{۰i} = ۱$ می‌باشد بنابه قضیهٔ دموآور:

$$\sqrt[۶]{۱} = \sqrt[۶]{۱}e^{\frac{۰+۲k\pi}{۶}i} = e^{k\pi/۳i} \qquad (k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵)$$



شکل ۴: ریشه‌های ششم واحد

$$
= \begin{cases} ۱e^{۰i} = ۱ & k = ۰ \\ ۱e^{\frac{\pi}{۳}i} = \cos(\frac{\pi}{۳}) + i\sin(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i & k = ۱ \\ ۱e^{\frac{۲\pi}{۳}i} = \cos(\frac{۲\pi}{۳}) + i\sin(\frac{۲\pi}{۳}) = \frac{-۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i & k = ۲ \\ ۱e^{\pi i} = -۱ & k = ۳ \\ ۱e^{\frac{۴\pi}{۳}i} = ۱e^{-\frac{۲\pi}{۳}i} = -\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}i & k = ۴ \\ ۱e^{\frac{۵\pi}{۳}i} = ۱e^{-\frac{\pi}{۳}i} = \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}i & k = ۵ \end{cases}
$$

اگر این شش عدد مختلط را در صفحهٔ مختلط ترسیم کنیم (به شکل ۴ توجه شود) ملاحظه خواهیم کرد که آنها رئوس یک شش ضلعی منتظم محاط در دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ را تشکیل می‌دهند.

پاسخ مسأله ۹) ابتدا بسط تیلور φ را در $x = x_۰$ می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-x_۰)^n \varphi(x) \\
&= (x-x_۰)^n \left\{ \varphi(x_۰) + (x-x_۰)\varphi'(x) + \frac{۱}{۲}(x-x_۰)^۲\varphi''(x_۰) + \cdots \right\} \\
&\simeq (x-x_۰)^n \varphi(x_۰)
\end{aligned}
$$

پس اگر n فرد باشد، آنگاه به ازای $x < x_۰$ تابع f منفی و به ازاء $x_۰ < x$ تابع f مثبت است. بنابراین f در $x_۰$ اکسترمم ندارد. اما اگر n زوج باشد، آنگاه به ازای هر x به اندازه کافی نزدیک به $x_۰$، تابع $f(x)$ مثبت است. و در $x = x_۰$ مساوی صفر است. بنابراین f در $x = x_۰$ دارای مینیمم موضعی برابر صفر می‌باشد.

امتحان پنجم

(۱) پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع زیر را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \pi^{x \ln x} & \text{اگر } x > 0 \\ \pi^{x} & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$$

(۲) هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin(x)}}{x}$ (بدون استفاده از قاعده هوپیتال)

ب) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \tan^{2}(\sqrt{x})\right)^{1/2x}$

(۳) قضیهٔ رُل را فقط بیان کنید و سپس با استفاده از آن ثابت کنید که بین هر دو ریشه حقیقی معادلهٔ $e^{x} \sin x = 1$ لااقل یک ریشهٔ $e^{x} \cos x = -1$ قرار دارد. (راهنمایی: فرض کنید که $f(x) = e^{-x} - \sin x$.)

(۴) هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید.

الف) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x}} dx$ ب) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \sin x - \cos x}$

ج) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^{3}} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^{3}}}}$

(۵) همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسره زیر را بررسی کنید.

الف) $\displaystyle\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(2x - 1)(3x - 2)}}$ ب) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\arctan(x)}{1 + x^{2}} dx$

(۶) ناحیه محدود به منحنی $y = \cos x$ و سهمی $y = \dfrac{9}{2\pi^{2}} x^{2}$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم حاصل از دوران را محاسبه نمائید. (توجه کنید که طول نقاط تلاقی $x_1 = \dfrac{-\pi}{3}$ و $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$ می‌باشند.)

(۷) الف) همگرایی یا واگرایی سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^{n^{2}}}$ را تعیین نمائید.

ب) فاصلهٔ همگرایی سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{n^{3} \times 3^{n}}$ را تعیین نمائید.

(۸) ریشه‌های معادلهٔ $z^{3} = \dfrac{1 + i}{1 - i}$ را بدست آورید.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) برای تحقیق پیوستگی f در $x=0$، حدود یکطرفهٔ آنرا در $x=0$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در آن نقطه مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \pi^{x\ln x} = \pi^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = \pi^{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)} \\
&\overset{\text{هـ}}{=} \pi^{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right)} = \pi^{\lim_{x\to 0^+}(-x)} = \pi^0 = 1 \\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \pi^x = \pi^0 = 1 \\
f(0) &= \pi^0 = 1
\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که حدراست و حدچپ با مقدار تابع در نقطه $x=0$ مساوی هستند. پس تابع در نقطه $x=0$ پیوسته است.

در مورد مشتق‌پذیری داریم:

$$\begin{aligned}
f'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi^{x\ln x}-1}{x} \\
&\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x+1)\pi^{x\ln x}\times \ln(\pi)}{1} \\
&= \ln(\pi) \lim_{x\to 0^+} \pi^{x\ln x} \times \lim_{x\to 0^+}(\ln x+1) = \ln(\pi)\times 1\times -\infty
\end{aligned}$$

پس مشتق راست f در $x=0$ وجود ندارد و در نتیجه تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

ذکر این نکته لازم است که در حل مسأله فوق از روابط

۱) $y=a^u \Rightarrow y'=u'a^u\ln a$ ۲) $\lim_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$

استفاده نموده‌ایم. تساوی دوم به دلیل این است که پایه لگاریتم $e=2/7>1$ می‌باشد.

پاسخ مسأله ۲) الف) از هم‌ارزی $\sin x \sim x$ و $e^x-1\sim x$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(2x)}-e^{\sin(x)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim_{x\to 0} e^x \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = e^0\times 1 = 1$$

پاسخ مسأله ۲) ب) فرض کنیم $y=(1+\tan^2(\sqrt{x}))^{\frac{1}{2x}}$ و $A=\lim_{x\to 0} y$ در اینصورت:

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan^2(\sqrt{x}))}{2x}$$

$$\overset{\text{ه}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{2\frac{1}{2\sqrt{x}}\tan(\sqrt{x})(1+\tan^2(\sqrt{x}))}{1+\tan^2(\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$$\overset{\text{ه}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\tan^2(\sqrt{x}))}{2\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}(1+\tan^2(\sqrt{x})) = \frac{1}{2}$$

بنابراین $A = e^{\frac{1}{2}}$.

راه حل دوم: اگر از هم‌ارزی $\tan x \sim x$ استفاده می‌کردیم، داشتیم:

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+(\sqrt{x})^2)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} \overset{\text{ه}}{=} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{1}{1+x}}{2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A = e^{1/2} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۳) برای مشاهدهٔ صورت قضیهٔ رول به قضیهٔ ۱.۵.۴ توجه شود.

فرض کنیم $f(x) = e^{-x} - \sin x$ و $a < b$ دو ریشه $y = f(x)$ هستند. در اینصورت f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است و $f(a) = f(b) = 0$. پس بنابه قضیهٔ رُل نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد که $f'(c) = 0$ یعنی $-e^{-c} - \cos c = 0$. بنابراین ثابت شد که اگر a و b که $a < b$ ریشه‌های معادله $e^{-x} = \sin x$ (یا بطور معادل $e^x \sin x = 1$) باشند، آنگاه نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $a < c < b$ ریشهٔ $e^{-x} = -\cos x$ (یا بطور معادل $e^x \cos x = -1$) است.

پاسخ مسأله ۴) الف) از روش جزء به جزء و با فرض:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -2\sqrt{1-x} \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$I = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1-x}\ln x - \int -2\sqrt{1-x} \cdot \frac{dx}{x}$$

اکنون با فرض $t = \sqrt{1-x}$، داریم: $x = 1 - t^2$ و $dx = -2t\,dt$. بنابراین:

$$\begin{aligned} I &= -2\sqrt{1-x}\ln x + 2\int t\frac{-2t\,dt}{1-t^2} \\ &= -2\sqrt{1-x}\ln x + 4\int \frac{t^2\,dt}{t^2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(۱)}{=} -۲\sqrt{۱-x}\ln x + ۴\int\left(۱+\frac{۱}{t^۲-۱}\right)dt\\
&= -۲\sqrt{۱-x}\ln x + ۴t + ۲\ln\left|\frac{t-۱}{t+۱}\right| + C\\
&= -۲\sqrt{۱-x}\ln x + ۴\sqrt{۱-x} + ۲\ln\left|\frac{\sqrt{۱-x}-۱}{\sqrt{۱-x}+۱}\right| + C
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) کسر $\frac{t^۲}{t^۲-۱}$ را تفکیک نموده‌ایم.

پاسخ مسأله ۴) ب) از تغییر متغیر تانژانت نصف قوس استفاده می‌کنیم یعنی:

$$t=\tan\left(\frac{x}{۲}\right) \Rightarrow dt=\frac{۱}{۲}\left(۱+\tan^۲\left(\frac{x}{۲}\right)\right)dx \Rightarrow dx=\frac{۲dt}{۱+t^۲}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{۱-\sin(x)-\cos(x)} &= \int\frac{\frac{۲dt}{۱+t^۲}}{۱-\frac{۲t}{۱+t^۲}-\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}} = \int\frac{dt}{t^۲-t}\\
&\overset{(۱)}{=} \int\left(\frac{۱}{t-۱}+\frac{-۱}{t}\right)dt = \ln|t-۱|-\ln|t|+C\\
&= \ln\left|\frac{t-۱}{t}\right|+C = \ln\left|۱-\frac{۱}{t}\right| = \ln\left|۱-\cot(\frac{x}{۲})\right|+C
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) کسر $\frac{۱}{t(t-۱)} = \frac{۱}{t^۲-t}$ را تجزیه کرده‌ایم.

پاسخ مسأله ۴) ج) این انتگرال یک دو جمله‌ای دیفرانسیل با $m=\frac{-۳}{۲}$، $n=\frac{۳}{۴}$ و $p=\frac{-۱}{۳}$ می‌باشد. چون $\frac{m+۱}{n}+p=-۱$ صحیح است و مخرج p برابر ۳ است فرض می‌کنیم $ax^n+b=x^nt^k$، که k در اینجا همان مخرج p می‌باشد. بنابراین $x^{۳/۴}t^۳=x^{۳/۴}+۱$. بنابراین با ضرب طرفین تساوی در $x^{-۳/۴}$ خواهیم داشت:

$$x^{-۳/۴}+۱=t^۳ \Rightarrow t=(x^{-۳/۴}+۱)^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow x^{-۳/۴}=t^۳-۱ \Rightarrow x=(t^۳-۱)^{-۴/۳}$$

از طرفی $dx=-۴t^۲(t^۳-۱)^{-۷/۳}dt$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{\sqrt{x^۳}\cdot\sqrt[۳]{۱+\sqrt[۴]{x^۳}}} &= \int x^{-۳/۲}(۱+x^{۳/۴})^{-۱/۳}dx\\
&= \int\left((t^۳-۱)^{-۴/۳}\right)^{-۳/۲}\left(۱+\left((t^۳-۱)^{-۴/۳}\right)^{۳/۴}\right)^{-۱/۳}
\end{aligned}$$

$$\left(-۴t^{۲}\cdot(t^{۳}-۱)^{-۷/۳}\cdot dt\right)$$
$$=-\int ۴(t^{۳}-۱)^{۲}(۱+\frac{۱}{t^{۳}-۱})^{-۱/۳}\cdot t^{۲}\cdot(t^{۳}-۱)^{-۷/۳}\cdot dt$$
$$=-۴\int(t^{۳}-۱)^{۲}(\frac{t^{۳}}{t^{۳}-۱})^{-۱/۳}\cdot t^{۲}\cdot(t^{۳}-۱)^{-۷/۳}\cdot dt$$
$$=-۴\int(t^{۳}-۱)^{\overbrace{۲+۱/۳-۷/۳}^{=۰}}\cdot\frac{t^{۲}}{t}\cdot dt$$
$$=-۴\int tdt=-۲t^{۲}+C=-۲(۱+x^{-۳/۴})^{۲/۳}+C$$

پاسخ مسأله ۵) الف) چون تابع مورد انتگرال، یعنی $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x(۲x-۱)(۳x-۲)}}$ بر بازهٔ $[\epsilon,+\infty)$ مثبت و معین است، کافی است ثابت کنیم که این انتگرال از بالا کراندار می‌باشد. روشن و بدیهی است که: $x<۲x-۱$ و $۲x<۳x-۲$، بنابراین:

$$\int_{۴}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(۲x-۱)(۳x-۲)}}=\lim_{b\to\infty}\int_{۴}^{b}\frac{dx}{\sqrt{x(۲x-۱)(۳x-۲)}}$$
$$\le\lim_{b\to\infty}\int_{۴}^{b}\frac{dx}{\sqrt{x(x)(۲x)}}=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{x^{-۱/۲}}{\frac{-۱}{۲}}\right]_{۴}^{b}$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-\sqrt{۲}}{\sqrt{x}}\right]_{۴}^{b}=\lim_{b\to\infty}\left[-\sqrt{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{b}}-\frac{۱}{۲}\right)\right]$$
$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۲}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{۱}{\sqrt{b}}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس انتگرال داده شده همگرا می‌باشد. البته می‌توان مقدار این انتگرال را نیز محاسبه کرد (چگونه؟) و پاسخ ۰.۰۰٦۴۱۹ است!

پاسخ مسأله ۵) ب) به کمک تغییر متغیر $u=\arctan x$ داریم:

$$\begin{array}{c|cc} x & ۰ & b \\ \hline u & ۰ & \arctan b \end{array}\qquad du=\frac{dx}{۱+x^{۲}}$$

در نتیجه

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\arctan x}{x^{۲}+۱}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{۰}^{b}\frac{\arctan x}{۱+x^{۲}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{۰}^{\arctan b}u\cdot du$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{u^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{\arctan b}=\lim_{b\to\infty}\frac{۱}{۲}\arctan^{۲}b=\frac{\pi^{۲}}{۸}$$

پاسخ مسأله ٦) پس از ترسیم نمودار تابع $y=\cos x$ و $y=\frac{۹x^{۲}}{۲\pi^{۲}}$ در یک صفحه در بازهٔ $[\frac{-\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}]$، نتیجه می‌گیریم که حجم مورد نظر عبارتست از $V=V_۱-V_۲$ که در اینجا $V_۱$

حجم حاصل از دوران $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ و $y = \cos x$ حول محور xها و V_2 حجم حاصل از دوران $y = \frac{9}{2\pi^2}x^2$ حول محور xها می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \pi \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\cos x)^2 dx - \pi \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\frac{9x^2}{2\pi^2}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1+\cos(2x)}{2} dx - \frac{81}{4\pi^3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} \\ &= \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} - \frac{\pi^2}{30} = \frac{3\pi^2}{10} + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) الف) از آزمون ریشه برای سری‌های عددی، استفاده می‌کنیم:

$$L = \lim \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

که چون $l < 1$ می‌باشد پس سری همگرا می‌باشد.

پاسخ مسأله ۷) ب) ابتدا شعاع همگرایی سری توانی را بدست می‌آوریم. چون $a_n = \dfrac{1}{n^3 \times 3^n}$ می‌باشد بنابراین $\mathbf{R}$ شعاع همگرایی آن برابر خواهد بود با:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \times 3^n}{(n+1)^3 \times 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

بنابراین $R = 3$ می‌باشد. پس اگر $|x| < 3$ (یعنی $-3 < x < 3$)، آنگاه سری همگرا می‌باشد و اگر $|x| > 3$ (یعنی $3 < x < -3$) باشد، آنگاه سری واگرا می‌باشد. ولی اگر $|x| = 3$ باشد، آنگاه: $x = \pm 3$ بنابراین اگر $x = 3$ باشد، آنگاه سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \times 3^{n-1}}$ حاصل می‌شود که همگرا است. زیرا سری با جملات مثبت است و:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \times 3^{n-1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

و اگر $x = -3$، آنگاه سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1} \times n^3}$ همگرای مطلق (یعنی قدرمطلق آن همگرا است) و بنابراین همگرا می‌باشد. پس در مجموع، فاصلهٔ همگرایی سری توانی داده شده عبارتست از: $[-3, 3]$

پاسخ مسأله ۸) ابتدا باید عبارت $\frac{1+i}{1-i}$ را ساده نمود. اگر $u = 1 + i$ باشد، آنگاه:

$$|u| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad \arg(u) = \arctan(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$$

در نتیجه

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{\pi i/4}}{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}} = e^{\pi i/4-(-\pi i/4)} = e^{\pi i/2}$$

اکنون با استفاده از قضیه دموآور داریم:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}} = \sqrt[3]{e^{\pi i/2}} = e^{\frac{\pi/2+2k\pi}{3}i} = e^{(\pi/6+2k\pi/3)i} \\ &= \begin{cases} e^{\pi i/6} = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & \text{اگر } k=0 \\ e^{5\pi i/6} = \cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & \text{اگر } k=1 \\ e^{9\pi i/6} = e^{3\pi i/2} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}) = 0 - i = -i & \text{اگر } k=2 \end{cases} \end{aligned}$$

امتحان ششم

(۱) از سه قسمت زیر به دو سئوال پاسخ دهید.

الف) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\int_1^{2x-1} e^{t^2}\cdot dt}{\sin(\pi x)}$ ب) $\lim_{x\to\pi/2}[\tan(x)]^{\tan(2x)}$

ج) پیوستگی تابع زیر را بررسی نمائید.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)\qquad (x\geq 0)$$

(۲) با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین (لانگرانژ) نامساوی زیر را بررسی کنید.

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\geq\frac{x}{x+1};\qquad (0<x\leq 1)$$

(۳) انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید.

الف) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^3-a^3}}$ ب) $\displaystyle\int\frac{d\theta}{4+5sec(\theta)}$

(۴) همگرایی و واگرایی انتگرال $\displaystyle\int_e^\infty\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ را بررسی نمائید.

(۵) حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین سهمی $y=x^2+1$ و خط $y=x+3$ را حول محور xهابدست آورید.

(٦) الف) همگرایی یا واگرایی سری $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{\log(n+1)}$ را بررسی نمائید.

ب) فاصلهٔ همگرایی سری $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{(x-2)^n}{2^n}$ را بدست آورید.

(۷) اولاً، عدد مختلط $z=1+i$ را بصورت هندسی (یا قطبی) بنویسید. ثانیاً، a و b را چنان بیابید که $z=1+i$، جواب معادلهٔ $z^5+az^3+b=0$ باشد. ثالثاً، تمام ریشه‌های پنجم $z=1+i$ را بیابید.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) الف) این حد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌انجامد. بنابراین از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\displaystyle\int_1^{2x-1} e^{t^2}\cdot dt}{\sin(\pi x)}\overset{\text{هـ}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)'e^{x^2}}{\pi\cos(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2e^{x^2}}{\pi\cos(\pi x)}=\frac{2e^1}{\pi(-1)}=\frac{-2e}{\pi}$$

پاسخ مسأله ۱) ب) فرض کنیم $y=[\tan(x)]^{\tan(۲x)}$ و $A=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(y)$ در اینصورت:

$$\begin{aligned}\ln A &= \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(\ln y)=\lim_{x\to\pi/۲}\tan(۲x)\ln(\tan x)=\lim_{x\to\pi/۲}\frac{\ln(\tan x)}{\cot(۲x)}\\ &\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to\pi/۲}\left(\frac{\frac{۱/\cos^۲ x}{\tan x}}{\frac{-۲}{\sin^۲(۲x)}}\right)=\lim_{x\to\pi/۲}\left(\frac{\frac{۱}{\cos x\sin x}}{\frac{-۲}{۴\sin^۲ x\cos^۲ x}}\right)\\ &= -۲\lim_{x\to\pi/۲}(\sin x\cos x)=۱\times ۰=۰\end{aligned}$$

بنابراین $\ln A=۰$ و حد مورد نظر $A=e^{۰}=۱$ می‌باشد.

پاسخ مسأله ۱) ج) بسته به وضعیت x نسبت به عدد یک، سه حالت در نظر می‌گیریم. اگر $۰\le x<۱$ باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty}x^n=۰$ بنابراین $f(x)=\frac{۱}{۱+۰}=۱$. اگر $x=۱$، آنگاه $f(۱)=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$. اگر $(x>۱)$ باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$ و بنابراین $f(x)=۰$ پس در مجموع:

$$f(x)=\begin{cases}۱ & \text{اگر } ۰\le x<۱\\ \frac{۱}{۲} & \text{اگر } x=۱\\ ۰ & \text{اگر } ۱<x\end{cases}$$

بنابراین اگر $x=۰$ باشد آنگاه f در x، پیوستگی راست دارد. اگر $۰<x<۱$ آنگاه f در یک همسایگی از x برابر یک است و بنابراین پیوسته است. اگر $x=۱$، آنگاه f در x؛ نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ بنابراین پیوسته نمی‌باشد. اگر $x>۱$ باشد، آنگاه f در یک همسایگی از x برابر (۰) است و بنابراین پیوسته می‌باشد.

پاسخ مسأله ۲) تابع $f(y)=\ln(x+y)$ را بر بازهٔ $[۰,۱]$ در نظر می‌گیریم، که x عددی ثابت و مثبت می‌باشد. در اینصورت، f بر $[۰,۱]$ پیوسته و بر $(۰,۱)$ مشتق‌پذیر (با مشتق $f'(y)=\frac{۱}{x+y}$) می‌باشد پس بنابه قضیه لاگرانژ، نقطه‌ای مانند $y_۰\in(۰,۱]$ وجود دارد بطوریکه:

$$f(۱)-f(۰)=f'(y_۰)(۱-۰)$$

یعنی، $\ln(x+۱)-\ln(x+۰)=\frac{۱}{x+y_۰}$. چون $۰<y_۰<۱$، بنابراین $\frac{۱}{x+۱}<\frac{۱}{x+y_۰}<\frac{۱}{x+۰}$، و در نتیجه

$$\frac{۱}{x+۱}<\ln(x+۱)-\ln x<\frac{۱}{x}$$

از طرفی، $\circ < x \leq ۱$، پس $\frac{x}{x+۱} \leq \frac{۱}{x+۱}$. بنابراین:

$$\frac{x}{x+۱} \leq \ln(x+۱) - \ln x = \ln(\frac{x+۱}{x})$$

پاسخ مسأله ۳) الف) می‌دانیم که در انتگرال $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ که در آن m و n و p اعداد گویا هستند هرگاه $\frac{m+۱}{n}$ مساوی عدد صحیح باشد فرض می‌کنیم $a+bx^n = t^\alpha$ که α مخرج کسر p می‌باشد. مشاهده می‌شود این انتگرال یک انتگرال از دوجمله‌ای دیفرانسیل است، که $m = -۱$؛ $n = ۳$ و $p = \frac{-۱}{۲}$ و از طرفی چون $\frac{m+۱}{n} = \circ$؛ صحیح است و مخرج p برابر ۲ می‌باشد،فرض می‌کنیم $x^۳ - a^۳ = t^۲$ بنابراین $t = (x^۳ - a^۳)^{\frac{۱}{۲}}$، $x = (t^۲ + a^۳)^{\frac{۱}{۳}}$ و پس $dx = \frac{۲}{۳}t(t^۲+a^۳)^{-\frac{۲}{۳}}$:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^۳ - a^۳}} = \int x^{-۱}(x^۳ - a^۳)^{\frac{-۱}{۲}} dx \\ &= \int \left\{(t^۲ + a^۳)^{\frac{۱}{۳}}\right\}^{-۱} (t^۲)^{\frac{-۱}{۲}} \left\{\frac{۲}{۳}t(t^۲+a^۳)^{\frac{-۲}{۳}} \cdot dt\right\} \\ &= \frac{۲}{۳}\int (t^۲+a^۳)^{-۱} dt = \frac{۲}{۳}\int \frac{dt}{t^۲+a^۳} \end{aligned}$$

اگر $a = \circ$، آنگاه $I = \frac{۲}{۳}\int \frac{dt}{t^۲}$ و $I = \frac{-۲}{۳t} + C$. بنابراین $I = \frac{-۲}{۳}x^{\frac{-۳}{۲}} + C$ در غیر اینصورت:

$$I = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt{a^۳}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{a^۳}}\right) + C = \frac{۲}{۳\sqrt{a^۳}} \arctan\left(\sqrt{(\frac{x}{a})^۳ - ۱}\right) + C$$

یادآوری و تکمیل: از قبل به خاطر دارید که:

$$\int \frac{du}{u^۲ + a^۲} = \frac{۱}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

پاسخ مسأله ۳) ب) از تغییر متغیر تانژانت نصف قوس استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $t = \tan(\frac{\theta}{۲})$، بنابراین

$$\begin{aligned} dt &= \left(\frac{\theta}{۲}\right)' \left(۱ + \tan^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)\right) = \frac{۱}{۲}(۱+t^۲)d\theta \;\Rightarrow\; d\theta = \frac{۲dt}{۱+t^۲} \\ I &= \int \frac{d\theta}{۴ + ۵\sec(\theta)} = \int \frac{\cos(\theta)d\theta}{۴\cos\theta + ۵} \\ &= \int \frac{(\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲})(\frac{۲dt}{۱+t^۲})}{۴(\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}) + ۵} = \int \frac{-۲(t^۲-۱)dt}{(t^۲+۱)(t^۲+۹)} \end{aligned}$$

برای حل انتگرال فوق می‌بایست کسر بدست آمده را تفکیک نمائیم:

$$\frac{-۲(t^۲-۱)}{(t^۲+۱)(t^۲+۹)}=\frac{A}{t^۲+۱}+\frac{B}{t^۲+۹}$$

بنابراین $-۲(t^۲-۱)=A(t^۲+۹)+B(t^۲+۱)$ و در نتیجه:

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=-۲ \\ ۹A+B=۲ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B=-۲-A \\ ۸A=۴ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{۱}{۲} \\ B=\frac{-۵}{۲} \end{array}\right.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{t^۲+۱}-\frac{۵}{۲}\int\frac{dt}{t^۲+۹} \\ &= \frac{۱}{۲}\arctan(t)-\frac{۵}{۲}\times\frac{۱}{۳}\arctan\left(\frac{t}{۳}\right)+C \\ &\overset{(۱)}{=} \frac{\theta}{۴}-\frac{۵}{۶}\arctan\left(\frac{۱}{۳}\tan\left(\frac{\theta}{۲}\right)\right)+C \end{aligned}$$

یادآوری و تکمیل: از مثلثات به خاطر دارید که $\sec(x)=\frac{۱}{\cos(x)}$، $\sin(x)=\frac{۲\tan(\frac{x}{۲})}{۱+\tan^۲(\frac{x}{۲})}$، $\cos(x)=\frac{۱-\tan^۲(\frac{x}{۲})}{۱+\tan^۲(\frac{x}{۲})}$ و $\tan(x)=\frac{۲\tan(\frac{x}{۲})}{۱-\tan^۲(\frac{x}{۲})}$. و در (۱) از رابطه $\arctan(\tan x)=x$ با شرط $-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$ استفاده شده که چون انتگرال نامعین است خطای آن در مقدار تابع C منظور می‌شود: دقت به این نکته لازم است که چنانچه انتگرال معین باشد، باید به دامنهٔ انتگرال توجه داشت که آیا از رابطه فوق می‌شود استفاده نمود یا اینکه باید مستقیماً با جاگذاری کرانهای انتگرال مقدار عبارت $\arctan(\tan x)$ را محاسبه نمود.

پاسخ مسأله ۴) به کمک تعریف انتگرال ناسره و فرض $u=\ln(x)$ داریم: $du=\frac{dx}{x}$ بنابراین:

$$I_p=\int_e^\infty\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\lim_{b\to\infty}\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\lim_{b\to\infty}\int_۱^{\ln b}\frac{du}{u^p}$$

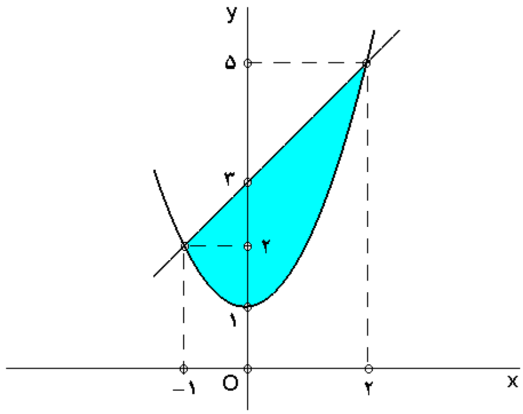
اگر $p>۱$ باشد آنگاه:

$$I_p=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{u^{۱-p}}{۱-p}\right]_۱^{\ln b}=\frac{۱}{p-۱}\lim_{b\to\infty}\left\{۱-\frac{۱}{(\ln b)^{p-۱}}\right\}=\frac{۱}{p-۱}$$

زیرا $p-۱>۰$ و $\lim_{b\to\infty}[\ln(b)]=\infty$. اگر $p\le۱$، آنگاه چون $۱<e\le u$، داریم: $u^p<u$ و لذا:

$$I_p=\lim_{b\to\infty}\int_۱^{\ln b}\frac{du}{u^p}\ge\lim_{b\to\infty}\int_۱^{\ln b}\frac{du}{u}=\lim_{b\to\infty}[\ln u]_۱^{\ln b}=\lim_{b\to\infty}\ln(\ln b)=\infty$$

پس I_p وقتی و تنها وقتی همگرا است که $p>۱$ باشد.



شکل ۵: پاسخ مسألهٔ ۵

پاسخ مسأله ۵) ابتدا خط و سهمی داده شده را برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = x + ۳ \\ y = x^۲ + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + ۳ \\ x^۲ - x - ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + ۳ \\ x = ۲, -۱ \end{cases}$$

همانطوریکه در شکل ۵ ملاحظه می‌شود، بایستی ناحیه‌ای که از پائین به سهمی $y = x^۲ + ۱$ و از بالا به خط $y = x + ۳$ و از اطراف به $x = -۱$ و $x = ۲$ محدود شده است را حول محور xها دوران بدهیم حاصل $V = V_۱ - V_۲$ خواهد بود که $V_۱$ حجم حاصل از دوران خط و $V_۲$ حجم حاصل از دوران سهمی می‌باشد:

$$\begin{aligned} V &= V_۱ - V_۲ = \pi \int_{-۱}^{۲} (x + ۳)^۲ dx - \pi \int_{-۱}^{۲} (x^۲ + ۱)^۲ dx \\ &= \pi \int_{-۱}^{۲} (-x^۴ - x^۲ + ۶x + ۸) dx \\ &= \pi \left[-\frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۳}{۳} + ۳x^۲ + ۸x \right]_{-۱}^{۲} = \frac{۱۱۷\pi}{۵} \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۶) الف) سری داده شده یک سری نوسانی است و قدرمطلق جملهٔ عمومی آن $x_n = \dfrac{۱}{\log(n+۱)}$ می‌باشد. بنابه آزمون لایبنتیز، شرط لازم و کافی برای همگرایی سری داده شده، آن است که دنبالهٔ x_n نزولی بوده و حد آن صفر باشد: چون $n < n + ۱$ و می‌دانیم لگاریتم تابعی صعودی است، پس $\log n < \log(n + ۱)$ و در نتیجه

$$x_n = \frac{۱}{\log n} > \frac{۱}{\log(n+۱)} = x_{n+۱}$$

بعلاوه:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

پس سری داده شده همگرا می‌باشد.

پاسخ مسأله ٦) ب) با فرض $y = x - 2$، سری داده شده به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2^n}$ تبدیل می‌شود که یک سری توانی با ضریب جملهٔ عمومی $a_n = \frac{1}{2^n}$ است. چون:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}\right) = \frac{1}{2}$$

پس شعاع همگرایی سری $R = 2$ می‌باشد. بنابراین اگر $|y| < 2$ (یعنی $-2 < y < 2$ یا $0 < x < 4$) آنگاه سری همگرا است. اگر $|y| > 2$ (یعنی «$y < -2$ و یا $y > 2$») و یا بطور معادل «$x < 0$ یا $x > 4$» آنگاه سری واگرا است. اما اگر $|y| = 2$ (یعنی $y = \pm 2$ یا بطور معادل «$x = 0$ یا $x = 4$») آنگاه سری داده شده به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n$ تبدیل می‌شود که یک سری با حد جملهٔ عمومی مخالف صفر است. بنابراین، واگرا می‌باشد. پس در مجموع بازهٔ همگرایی سری داده شده عبارتست از: $(0, 4)$.

پاسخ مسأله ۷) اولاً: چون $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ و $\theta = \arctan(1/1) = \frac{\pi}{4}$ و با توجه به یان موضوع که z متعلق به ناحیه اول است. پس می‌توان گفت که شکل قطبی z عبارت است از: $\sqrt{2}e^{\pi i/4}$.

پاسخ مسأله ۷) ثانیاً: چون $z = 1 + i$، پس

$$\begin{aligned} z^2 &= (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i, \\ z^3 &= zz^2 = (1+i)2i = 2i + 2i^2 = -2 + 2i, \\ z^5 &= z^3 z^2 = (-2+2i)2i = -4i + 4i^2 = -4 - 4i \end{aligned}$$

و بنابراین $z^5 + az^3 + b = 0$ یعنی:

$$(-4 - 4i) + a(-2 + 2i) + b = 0 \;\Rightarrow\; (-2 + b - 4) + i(-4 + 2a) = 0$$

بنابراین

$$\begin{cases} -4 - 2a + b = 0 \\ 2a - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 + 2a \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ a = 2 \end{cases}$$

پاسخ مسأله ۷) ثالثاً) بنابه قضیه دموآور:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{1+i} &= \sqrt[5]{\sqrt{2}e^{\pi i/4}} = \sqrt[10]{2}e^{\dfrac{\pi/4+2k\pi}{5}i} \\ &= \sqrt[10]{2}\cos\left(\frac{1+8k}{20}\pi\right) + \sqrt[10]{2}\sin\left(\frac{1+8k}{20}\pi\right)i\end{aligned}$$

که در آن $k = 0, 1, 2, 3, 4$. بنابراین،

$$= \begin{cases} \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{20}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{20}\right)\right] & k = 0 \text{ اگر } \\ \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\dfrac{9\pi}{20}\right) + i\sin\left(\dfrac{9\pi}{20}\right)\right] & k = 1 \text{ اگر } \\ \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\dfrac{17\pi}{20}\right) + i\sin\left(\dfrac{17\pi}{20}\right)\right] & k = 2 \text{ اگر } \\ \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right] & k = 3 \text{ اگر } \\ \sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\dfrac{33\pi}{20}\right) + i\sin\left(\dfrac{33\pi}{20}\right)\right] & k = 4 \text{ اگر } \end{cases}$$

امتحان هفتم

(۱) اگر $f(x) = \dfrac{x+x^{2}e^{nx}}{1+e^{nx}}$ مفروض است. پیوستگی تابع $g(x)$ با ضابطهٔ $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ را بررسی کنید.

(۲) هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos(\dfrac{2}{x})\right]^{x^{3}}$

ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{0}^{x} e^{(t^{2}-x^{2})}.(t^{2}+1)dt$

(۳) هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید:

الف) $\displaystyle\int \sin^{\frac{1}{2}}(x).\cos^{-\frac{5}{2}}(x)\cdot dx$

ب) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^{5}\sqrt{x^{2}+2x}}$

(۴) فقط به یکی از دو سئوال زیر پاسخ دهید:

الف) مطلوبست تعیین مساحت ناحیهٔ واقع در داخل $r^{2} = 2a^{2}\cos(2\theta)$ و خارج دایرهٔ $r=a$.

ب) مطلوبست تعیین مساحت ناحیهٔ واقع در داخل کارویوئید $r = a(1+\cos\theta)$ و خارج دایرهٔ $r = a\cos(\theta)$.

(۵) مطلوبست محاسبهٔ حجم حاصل از دوران دایره $x^{2}+y^{2}=1$ حول خط $x=2$.

(٦) مطلوبست تعیین شعاع و فاصلهٔ تقارب سری $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x-1)^{n}}{2^{n}(3n-1)}$ و تعیین همگرایی و یا واگرایی سری در نقاط انتهایی فاصله.

(۷) به ازای چه مقداری از c انتگرال توسعی (غیرعادی، ناسره) زیر همگرا است و سپس مقدار انتگرال را بیابید:

$$\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{cx}{x^{2}+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$$

(۸) فقط به یکی از دو سئوال زیر پاسخ دهید:

الف) مجموعهٔ z هایی را بیابید که $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$.

ب) مطلوبست تعیین تمام ریشه‌های معادلهٔ روبرو: $z^{4}+z^{2}-1=0$.

(۹) قضیهٔ مقدار میانگین (لاگرانژ) را بیان کرده و نشان دهید که به ازاء هر عدد حقیقی $\alpha \geq 1$ رابطهٔ زیر برقرار است (به شرط آنکه $(z+1) > 0$ باشد).

$$(1+z)^{\alpha} \geq 1+\alpha z$$

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) اگر $x < 0$، آنگاه $0 < e^x < 1$، $\lim_{n\to\infty} e^{nx} = \lim_{n\to\infty} (e^x)^n = 0$ و

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{x + 0}{1 + 0} = x$$

اگر $x = 0$، آنگاه $g(0) = \dfrac{0 + 0e^0}{1 + e^0} = 0$. اگر $x > 0$، آنگاه $nx > 0$ و لذا $\lim_{n\to\infty} e^{nx} = +\infty$ پس با فرض $m = e^{nx}$، داریم:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{m\to\infty} \frac{x + x^2 m}{1 + m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{x}{m} + x^2}{\frac{1}{m} + 1} = x^2$$

بنابراین ، در مجموع داریم:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که اگر $x_0 > 0$، آنگاه g در همسایگی x_0 با x^2 برابر است و بنابراین پیوسته می‌باشد. اگر $x_0 < 0$، آنگاه g در یک همسایگی از x_0 با x برابر است و بنابراین پیوسته می‌باشد. اگر $x_0 = 0$ آنگاه:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

پس چون حد چپ و راست g در x_0 موجود و برابر $g(0) = 0$ است، پس g در $x_0 = 0$ نیز پیوسته است. یعنی، g بر کل $\mathbf{R}$ پیوسته است.

پاسخ مسأله ۲) الف) فرض می‌کنیم $y = \left[\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right]^{x^3}$ و $A = \lim_{x\to\infty} y$ در اینصورت:

$$\ln A = \lim_{x\to\infty} (\ln y) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to\infty} x^3 \ln\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right] \overset{(2)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left[1 - 2(\frac{1}{x})^2\right]}{\frac{1}{x^3}}$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{1}{x^3}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-2x^3}{x^2}\right) = -2 \lim_{x\to\infty} x = -\infty$$

بنابراین $\ln A = -\infty$ و حد مورد نظر عبارتست از: $A = e^{-\infty} = 0$.

توجه داشته باشید که در (۱) از رابطه مثلثاتی $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ و در (۲) چون x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند کمان $1/x$ به سمت صفر میل می‌کند و می‌توان از هم‌ارزی $\sin x \sim x$ استفاده نمود و در (۳) نیز زمانی که x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند عبارت $2/x^2$ به سمت صفر میل کرده و می‌توان از هم‌ارزی $\ln(1 + ax) \sim ax$، استفاده نمود.

پاسخ مسأله ۲) ب) حد مورد نظر به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ می‌انجامد. به کمک قاعدهٔ هوپیتال و نیز فرمول مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}\int_۰^x e^{(t^۲-x^۲)}.(t^۲+۱)\cdot dt &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^۲}}{x}\int_۰^x e^{t^۲}.(t^۲+۱)\cdot dt\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{۱}{xe^{x^۲}}\int_۰^x e^{t^۲}.(t^۲+۱)\cdot dt \overset{\text{ه}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^۲}\cdot(x^۲+۱)}{e^{x^۲}+۲x^۲e^{x^۲}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{۱+۱/x^۲}{۲+۱/x^۲} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^۲+۱}{۲x^۲+۱} = \frac{۱}{۲}\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۳) الف) اگر توان عبارت سینوسی را m و توان عبارت کسینوسی را n بنامیم داریم: $m+n=\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۲}=-۲$ که مشاهده می‌شود که حاصل عددی منفی و زوج است بنابراین از تغییر متغیر $\tan(x)=t$ استفاده می‌کنیم داریم: $dt=(۱+\tan^۲x)dx$ و می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}I &= \int \sin^{۱/۲}(x)\cdot\cos^{-۵/۲}(x)dx = \int\frac{\sin^{۱/۲}(x)}{\cos^{۱/۲}(x)}.\cos^{-۲}(x).dx\\ &= \int \tan^{۱/۲}(x).\frac{۱}{\cos^۲(x)}.dx = \int\tan^{۱/۲}(x)\cdot(۱+\tan^۲(x))\cdot dx\\ &= \int t^{۱/۲}.dt = \frac{۲}{۳}t^{۳/۲}+C = \frac{۲}{۳}\sqrt{\arctan^۳(x)}+C\end{aligned}$$

یادآوری و تکمیل: از مثلثات به خاطر دارید که: $\cos^۲(x)=\frac{۱}{۱+\tan^۲(x)}$ و یا $\frac{۱}{\cos^۲}(x)=۱+\tan^۲(x)$ و همچنین $\cos^۲(x)=\frac{\cot^۲(x)}{۱+\cot^۲(x)}$.

پاسخ مسأله ۳) ب) ابتدا فرض می‌کنیم $\frac{۱}{u}=x+۱$، بنابراین $x=\frac{۱}{u}-۱$ و $dx=\frac{-du}{u^۲}$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}I &= \int\frac{dx}{(x+۱)^۵\sqrt{x^۲+۲x}} = \int\frac{\frac{-du}{u^۲}}{(\frac{۱}{u})^۵\sqrt{(\frac{۱}{u}-۱)^۲+۲(\frac{۱}{u}-۱)}}\\ &= \int\frac{\frac{-du}{u^۲}}{\frac{\sqrt{۱-u^۲}}{u^۶}} = -\frac{u^۴\,du}{\sqrt{۱-u^۲}}\end{aligned}$$

اکنون فرض می‌کنیم $u=\sin(t)$، پس $du=\cos(t)dt$ و:

$$\begin{aligned}I &= \int\frac{-\sin^۴(t)}{\sqrt{۱-\sin^۲(t)}}.\cos(t)dt = -\int\sin^۴(t).dt\\ &\overset{(۱)}{=} -\int(\frac{۱-\cos(۲t)}{۲})^۲.dt = \frac{-۱}{۴}\int(۱-۲\cos(۲t)+\cos^۲(۲t)).dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{(2)}{=} \quad \frac{-1}{4}t+\frac{1}{4}\sin(2t)-\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos(4t)}{2}.dt\\
&= \quad -\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\sin(2t)-\frac{1}{8}t-\frac{1}{32}\sin(4t)+C\\
&= \quad \frac{-3}{8}t+\frac{1}{4}\sin(2t)-\frac{1}{32}\sin(4t)+C
\end{aligned}
$$

اما $t=\arcsin(u)$ و $u=\dfrac{1}{x+1}$ می‌باشد. بنابراین:

$$
\begin{aligned}
\sin(2t)&=2\sin(t)\cdot\cos(t)=2u\sqrt{1-u^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}\\
\cos(2t)&=1-2\sin^2(t)=1-2u^2=1-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\\
\sin(4t)&=2\sin(2t)\cdot\cos(2t)=\frac{4}{(x+1)^4}(x^2+2x-1)\cdot\sqrt{x^2+2x}
\end{aligned}
$$

و در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
I \quad = \quad & \frac{-3}{8}\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}\\
&-\frac{1}{8(x+1)^4}(x^2+2x-1)\sqrt{x^2+2x}+C
\end{aligned}
$$

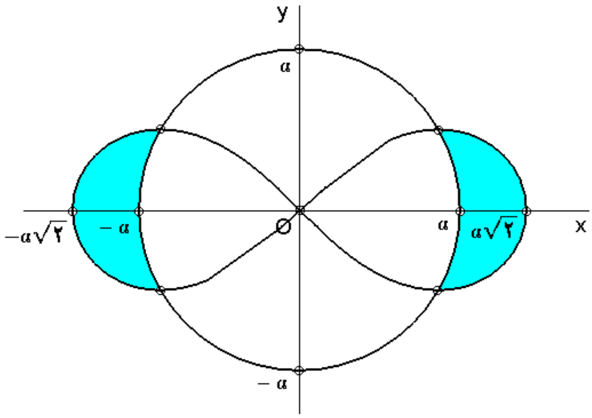
که در (۱) از فرمول $\sin^2(\alpha)=\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ و در (۲) از فرمول $\cos^2(\alpha)=\dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ استفاده شده است.

پاسخ مسأله ۴) الف) از $r^2=2a^2\cos(2\theta)$ نتیجه می‌گیریم که باید $\cos(2\theta)\geq 0$ و در اینصورت: $r=\sqrt{2}a\sqrt{\cos(2\theta)}$ اما شرط $\cos(2\theta)\geq 0$ به معنی این است که $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2\theta\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$. که اگر $k=0$ آنگاه $-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$ و اگر $k=1$ باشد آنگاه $\frac{3\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{4}$ است. برای ترسیم نمودار تابع $r=a\sqrt{2\cos(2\theta)}$ در صفحهٔ دکارتی توجه می‌کنیم که:

θ	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	0	$5\pi/4$
r	0	$a\sqrt{2}$	0	0	$a\sqrt{2}$	0

بنابراین می‌توان شکل ٦ را ترسیم نمود. ناحیه مورد نظر، ناحیه حاشورخورده می‌باشد. بنابراین اگر مساحت ناحیه سمت راست را A_1 و سمت چپ را A_2 بنامیم، مساحت خواسته شده A برابر است با A_1+A_2 و چون $A_1=A_2$ می‌باشد داریم:

$$
\begin{aligned}
A \quad &= \quad 2A_1=2\times\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(a\sqrt{2\cos(2\theta)}\right)^2\cdot d\theta\\
&= \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4}2a^2\cdot\cos(2\theta)d\theta=\Big[a^2\sin(2\theta)\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}=2a^2
\end{aligned}
$$



شکل ٦: مجموعهٔ A در مسالهٔ ۴ (الف)

پاسخ مسأله ۴) ب) دامنهٔ $r=a(1+\cos\theta)$ برابر $[-\pi,\pi]$ و دامنهٔ $r=a\cos(\theta)$ (چون $r\geq 0$) برابر $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ است. ابتدا این توابع را ترسیم می‌کنیم. برای این منظور جدول زیر را ترتیب می‌دهیم:

θ	$-\pi$	$-5\pi/6$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	$5\pi/6$	π
$r=a(1+\cos\theta)$	0	$a/2$	a	$2a$	a	$a/2$	0
$r=a\cos(\theta)$	$-$	$-$	0	a	0	$-$	$-$

بنابراین، نمودار هر یک از این دو منحنی را می‌توان در شکل ۷ ترسیم کرد. مساحت ناحیه مورد نظر A برابر $2A'$ است که A' مساحت ناحیهٔ واقع در بالای محور xها می‌باشد:

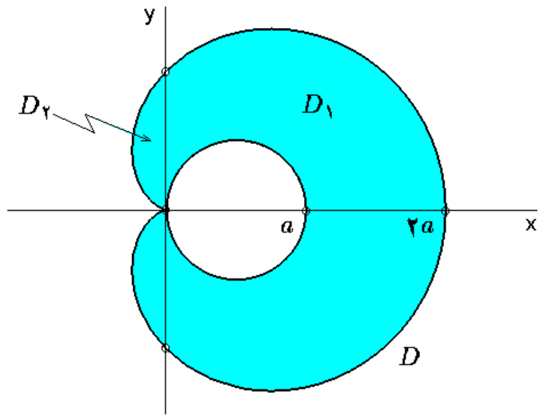
$$D' \;:\; 0\leq\theta\leq\pi\,,\; a\cos(\theta)\leq r\leq a(1+\cos\theta)$$

اما ناحیه D' اجتماعی از دو ناحیه به شرح زیر است:

$$D'=D_1\cup D_2$$
$$D_1 \;:\; 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\,,\; a\cos(\theta)\leq r\leq a(1+\cos(\theta))$$
$$D_2 \;:\; \frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi\,,\; 0\leq r\leq a(1+\cos(\theta))$$

بنابراین، در مجموع داریم:

$$A=2A'=2\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\big(a(1+\cos\theta)\big)^2-(a\cos\theta)^2\right].d\theta\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}[a(1+\cos\theta)]^2.d\theta\right\}$$



شکل ۷: مجموعهٔ D در مسألهٔ ۴ (ب)

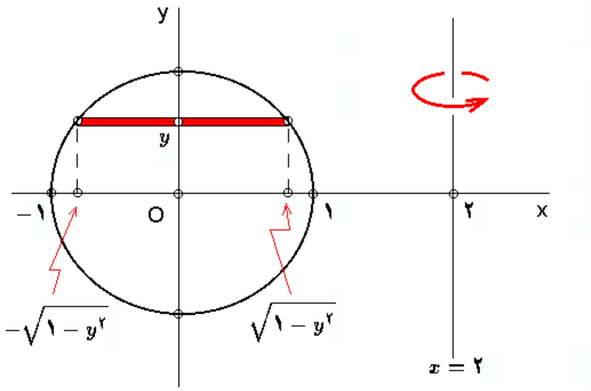
$$\begin{aligned}
&= a^۲ \int_۰^{\pi/۲} (۱ + ۲\cos\theta) d\theta + a^۲ \int_{\pi/۲}^{\pi} (۱ + ۲\cos\theta + \cos^۲\theta) d\theta \\
&= a^۲ \left[\theta + ۲\sin\theta\right]_۰^{\pi/۲} + a^۲ \left[\theta + ۲\sin\theta\right]_{\pi/۲}^{\pi} + a^۲ \int_{\pi/۲}^{\pi} \frac{۱ + \cos(۲\theta)}{۲} . d\theta \\
&= a^۲ (\frac{\pi}{۲} + ۲) + a^۲ (\frac{\pi}{۲} - ۲) + \frac{a^۲}{۲} \left[\theta + \frac{۱}{۲}\sin(۲\theta)\right]_{\pi/۲}^{\pi} = \frac{۵\pi}{۴} a^۲
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۵) با توجه به شکل ۸ از روش المان‌گیری استفاده می‌کنیم. بازهٔ $[-۱, ۱]$ از محور y را در نظر گرفته و قطعهٔ $[y, y + \triangle y]$ از آنرا جدا می‌کنیم. مستطیلی از دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ توسط آن مجزا می‌شود. حجم نواری که از دوران این مستطیل حول خط $x = ۲$ حاصل می‌شود برابر است با

$$dV = \pi \left(\sqrt{۱ - y^۲} + ۲\right)^۲ dy - \pi \left(\sqrt{۱ - y^۲}\right)^۲ dy = \pi \left(۴ + ۲\sqrt{۱ - y^۲}\right) dy$$

بنابراین حجم مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-۱}^{۱} dV = ۲\pi \int_{-۱}^{۱} (۲ + \sqrt{۱ - y^۲}) dy \\
&= ۲\pi \left[۲y + \frac{۱}{۲} y\sqrt{۱ - y^۲} + \frac{۱}{۲}\arcsin y\right]_{-۱}^{۱} = \pi(۸ + \pi)
\end{aligned}$$



شکل ۸: روش المانگیری برای حل مسألهٔ ۵

پاسخ مسأله ٦) ضریب جملهٔ عمومی این سری توانی، $x_n = \frac{n}{2^n(3n-1)}$ می‌باشد. پس اگر **R** شعاع همگرایی آن باشد آنگاه:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}(3n+2)}}{\frac{n}{2^n(3n-1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{2n(3n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(3-\frac{1}{n})}{2(3+\frac{2}{n})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

پس $R=2$. یعنی اگر $|x-1|<2$ (یا بطور معادل $-1<x<3$) آنگاه سری همگرا است و اگر $|x-1|>2$ (یا بطور معادل $x>3$ یا $x<-1$) آنگاه سری واگرا است. از طرفی اگر $|x-1|=1$ (یا بطور معادل $x=3$ یا $x=-1$) آنگاه در مقایسه با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n(\pm 1)^n}{2^n(3n-1)}}{\frac{1}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0$$

و چون سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ با قدرنسبت کمتر از یک می‌باشد پس همگرا است. بنابراین، سری به ازای $x=-3$ و $x=-1$ همگرا می‌باشد. نتیجه اینکه، دامنهٔ همگرایی $[-1,3]$ است.

پاسخ مسأله ۷) به کمک تعریف انتگرال ناسره داریم:

$$\begin{aligned}
I_c &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{cx}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx\\
&= \lim_{a\to\infty}\int_0^{a}\left(\frac{cx}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx\\
&= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{c}{2}\ln|x^2+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^a\\
&= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{c}{2}\ln(a^2+1)-\frac{1}{2}\ln|2a+1|\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\ln\left|\frac{(a^2+1)^c}{2a+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\lim_{a\to\infty}\frac{(a^2+1)^c}{2a+1}\right|
\end{aligned}$$

اگر $c<\frac{1}{2}$، آنگاه درجه صورت کمتر از درجه مخرج می‌شود و لذا حد قدرمطلق صفر می‌گردد و بنابراین I_c به $-\infty$ میل می‌کند (زیرا $\lim\limits_{a\to 0^+}\ln a=-\infty$).

اگر $c=\frac{1}{2}$، آنگاه:

$$I_c=\frac{1}{2}\ln\left|\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{a^2+1}}{2a+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{1+(\frac{1}{a})^2}}{2+\frac{1}{a}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

اگر $c>\frac{1}{2}$، آنگاه درجه صورت بیشتر از درجه مخرج می‌شود و لذا حد داخل قدرمطلق بی‌نهایت می‌شود و بنابراین I_c به $+\infty$ واگرا می‌شود.

در مجموع اینکه، I_c وقتی و تنها وقتی همگرا است که $c=\frac{1}{2}$ و بعلاوه $I_c=\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}\ln 2$.

پاسخ مسأله ۸) الف) فرض کنیم $z=x+yi$. چون باید $\frac{z-3}{z+3}$ تعریف شده باشد، پس باید مخرج کسر مخالف صفر باشد یعنی: $z=x+yi\neq -3+0i$. از شرط $\left|\frac{z-3}{z+3}\right|=2$ نتیجه می‌گردد که $|z-3|=2|z+3|$ و یا بطور معادل:

$$\begin{aligned}
|(x-3)+yi| &= 2|(x+3)+yi|\\
\sqrt{(x-3)^2+y^2} &= 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}\\
x^2-6x+9+y^2 &= 4(x^2+6x+9+y^2)
\end{aligned}$$

بنابراین $3x^2+30x+3y^2+27=0$. پس $x^2+10x+y^2+9=0$ پس از مربع کامل کردن داریم: $(x+5)^2+y^2=16$ که معادله دایره‌ای به مرکز $-5+0i$ و شعاع ۴ در صفحه

مختلط است. نقطه $z = -۳ + ۰i$ بر مجموعه قرار ندارد و لذا نگرانی از صفر شدن مخرج بی‌مورد است.

پاسخ مسأله ۸) ب) معادلهٔ داده شده برحسب $z^۲$ یک معادلهٔ درجه دوم است. بنابراین $z^۲ = \frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$. اگر $z^۲ = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$، آنگاه $z = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}}$، که هر دو حقیقی هستند؛ و اگر $z^۲ = -\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$، آنگاه $z = \pm\sqrt{-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}} = \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}}$، که هر دو مختلط هستند.

پاسخ مسأله ۹) برای مشاهده صورت این پاسخ مساله ۲ ار امتحان دوم توجه شود.

فرض کنیم $\alpha \geq ۱$ و تابع $f(x) = (۱+x)^\alpha$ را بر بازهٔ $[۰, z]$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت f بر $[۰, z]$ پیوسته و بر $(۰, z)$ مشتق‌پذیر است. بنابراین: $f'(x) = \alpha(۱+x)^{\alpha-۱}$. پس بنا به قضیه لاگرانژ، نقطه‌ای مانند $c \in (۰, z)$ وجود دارد بطوریکه $f(z) - f(۰) = f'(c)(z - ۰)$. به بیان دیگر

$$(۱+z)^\alpha - ۱ = \alpha(۱+c)^{\alpha-۱}z$$

اما تابع $y \mapsto y^{\alpha-۱}$ صعودی است (زیرا $\alpha \geq ۱$ و لذا $\alpha - ۱ \geq ۰$) و بنابراین از $۱ + c > ۱$ نتیجه می‌شود $(۱+c)^{\alpha-۱} > ۱$. در نتیجه، به کمک نامساوی بالا داریم:

$$(۱+z)^\alpha - ۱ \geq \alpha z$$

که نامساوی مورد نظر ما می‌باشد.

امتحان هشتم

(۱) هر یک از حدود زیر را محاسبه نمائید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\cot x}$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right)-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right)$

ج) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$ (بدون استفاده از قاعده هوپیتال)

(۲) نشان دهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \text{ اگر} \\ 0 & x=0 \text{ اگر}\end{cases}$$

در فاصلهٔ $(-\infty,+\infty)$ دارای مشتق مرتبهٔ اول بوده ولی در $x=0$ دارای مشتق مرتبهٔ دوم نمی‌باشد.

(۳) الف) قضیهٔ مقدار میانگین را بیان و ثابت کرده، برای آن تعبیر هندسی ارائه دهید.

ب) با استفادهٔ از قضیهٔ رُل نشان دهید که مشتق تابع $f(x)=x^4-8x^2+12x$ فقط یک ریشه در $[-1,1]$ دارد.

(۴) بسط مک‌لورن تابع $f(x)=(1+x)^x$ را تا توان سوم x بنویسید.

(۵) هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید.

الف) $\int\frac{x^3dx}{x^2-2x+3}$ ب) $\int 2x\sqrt{4-x^2}dx$

ج) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$ د) $\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

(٦) طول یک قوس از منحنی سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\leq t\leq 2\pi$$

را محاسبه نمائید.

(۷) خط مستقیمی موازی صفحهٔ yOz حرکت می‌کند و همواره بر دو بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ که در صفحات xOy و xOz واقع هستند متکی است. حجم بدست آمده از جسمی را که این خط متحرک می‌سازد حساب کنید.

(۸) الف) سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(x-1)^n$ مفروض است. فاصلهٔ همگرایی سری را بدست آورید و در صورت متناهی بودن، همگرایی سری را در نقاط انتهایی فاصلهٔ همگرایی بررسی نمائید.

ب) همگرایی سری‌های زیر را تحقیق نمائید.

$$a)\ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

(۹) الف) عبارت $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ را بصورت $\alpha + i\beta$ بنویسید.

ب) فرض کنید n عددی اول است و $w \neq 1$ یک ریشهٔ n ام واحد باشد، نشان دهید که سایر ریشه‌های n ام واحد به شکل w، w^2، . . . w^{n-1} هستند و بعلاوه داریم:
$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) الف) فرض کنیم $y = \left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\cot x}$ و $A = \lim_{x\to 0} y$. در اینصورت:

$$\ln A = \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \cot x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\sin x}$$

که حد قسمت اول برابر (یک) است و حد دوم به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌انجامد. پس، به کمک قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\ln A \overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{\cos x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}\right)$$

چون $\sin x \sim x$ و $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ می‌باشد، داریم:

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - x}{x\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{2}}{x} = \frac{-1}{2}\lim_{x\to 0} x = 0$$

بنابراین $A = e^0 = 1$.

پاسخ مسأله ۱) ب) با توجه به $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ داریم:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to\infty}\left[\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})\right] \\ &= \lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right) \\ &= 2\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right) \end{aligned}$$

چون $-1 \leq \cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right) \leq 1$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$، داریم $A = 0$، زیرا حاصلضرب یک تابع کراندار در یک تابع بی‌نهایت کوچک، تابعی بی‌نهایت کوچک است.

پاسخ مسأله ۱) ج)

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{3})} = 2\lim_{x\to\pi/3}\frac{\frac{1}{2}-\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{3})}\\ &= 2\lim_{x\to\pi/3}\frac{\cos(\frac{\pi}{3})-\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{3})} = -2\lim_{x\to\pi/3}\frac{(\cos x-\cos(\frac{\pi}{3}))/(x-\frac{\pi}{3})}{\sin(x-\frac{\pi}{3})/(x-\frac{\pi}{3})}\\ &= -2\left(\lim_{x\to\pi/3}\frac{\cos x-\cos(\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}\right)\div\left(\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}\right)\end{aligned}$$

که پرانتز اول برابر مشتق $y=\cos x$ در نقطه $x=\frac{\pi}{3}$ است و لذا برابر $-\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ می‌باشد و پرانتز دوم معادل با حد: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ می‌باشد که برابر با عدد یک است. بنابراین: $A=-2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)(1)=\sqrt{3}$.

پاسخ مسأله ۲) اگر $x\neq 0$، آنگاه f در همسایگی x برابر $x^2\sin(\frac{1}{x})$ است و بنابراین:

$$f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin(\frac{1}{x})=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{اگر } x\neq 0\\ 0 & \text{اگر } x=0\end{cases}$$

اما $y=f'(x)$ در $x=0$ پیوسته نیست، زیرا حد آن در $x=0$ وجود ندارد. برای اثبات این امر دنبالهٔ $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ همگرا به صفر را در نظر می‌گیریم، که به ازاء آن حد:

$$\lim_{n\to\infty}f'(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi)-\cos(2n\pi)\right\}=0-\lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

وجود ندارد. پس f بر $\mathbf{R}$ مشتق‌پذیر است، ولی در $x=0$ مشتق دوم ندارد.

پاسخ مسأله ۳) الف) برای مشاهدهٔ صورت قضیهٔ مقدار میانگین (یا لاگرانژ) و نیز اثبات آن به داسخ مساله ۲ از امتحان دوم توجه شود، همچنین برای ملاحظهٔ تعبیر هندسی این قضیه به پاسخ مساله ۳ از امتحان چهارم مراجعه شود.

پاسخ مسأله ۳) ب) مشتق تابع داده شده برابر $f'(x)=4x^3-16x+12$ می‌باشد. ملاحظه می‌شود که $f'(1)=0$ و $f'(-1)=24$، پس f' حداقل یک ریشه بر بازهٔ $(-1,1)$ دارد. برای اثبات یگانگی از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم: $-1<x_0<1$ و $f'(x_0)=0$. در اینصورت، چون f' بر $[x_0,1]$ پیوسته و بر $(x_0,1)$ مشتق‌پذیر است، از قضیهٔ رُل نتیجه می‌شود که یک نقطه مانند $c\in(x_0,1)$ وجود دارد

که: $(f')'(c)=\circ$، یعنی $۱۶-۱۲c^۲=\circ$. اما در این حالت $c^۲=\frac{۴}{۳}$ یا $c=\pm\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ که هیچ یک در بازهٔ $(-۱,۱)$ (و بنابراین، بر بازهٔ $(x_\circ,۱)$) قرار ندارد. پس فرض وجود $x_\circ$ غلط بوده و f' بر $[-۱,۱]$ تنها یک ریشه دارد.

پاسخ مسأله ۴) با توجه به اینکه، در حوالی $x=\circ$:

$$\begin{aligned} e^x &= ۱+x+\frac{x^۲}{۲}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \\ \ln(۱+x) &= x-\frac{x^۲}{۲}+\cdots+(-۱)^{n+۱}\frac{x^n}{n}+\cdots \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= (۱+x)^x = e^{\ln[(۱+x)^x]} = e^{x\ln(۱+x)} \\ &= ۱+x\ln(۱+x)+\frac{۱}{۲}\{x\ln(۱+x)\}^۲+\frac{۱}{۶}\{x\ln(۱+x)\}^۳+\cdots \\ &= ۱+x\left\{x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\cdots\right\}+\frac{۱}{۲}x^۲\left\{x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\cdots\right\}^۲ \\ &\quad +\frac{۱}{۶}x^۳\left\{x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\cdots\right\}^۳+\cdots \\ &= ۱+\left\{x^۲-\frac{x^۳}{۲}+\frac{x^۴}{۳}-\cdots\right\}+\frac{۱}{۲}x^۴\left\{۱-\frac{x^۳}{۲}+\frac{x^۴}{۳}-\cdots\right\}^۲+\cdots \\ &= ۱+x^۲-\frac{x^۳}{۲}+O(۳) \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۵) الف) چون درجهٔ صورت کسر داده شده بزرگتر از مخرج آن است، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$I=\int\frac{x^۳}{x^۲-۲x+۳}dx=\int\left\{x+۲+\frac{x-۶}{x^۲-۲x+۳}\right\}dx$$

چون مشتق مخرج، $(۲x-۲)$ است،می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} I &= \int(x+۲)dx+\int\frac{\frac{۱}{۲}(۲x-۲)-۵}{x^۲-۲x+۳}dx \\ &= \frac{x^۲}{۲}+۲x+\frac{۱}{۲}\int\frac{(۲x-۲)dx}{x^۲-۲x+۳}-۵\int\frac{dx}{x^۲-۲x+۳} \\ &= \frac{x^۲}{۲}+۲x+\frac{۱}{۲}\ln|x^۲-۲x+۳|-۵\int\frac{dx}{(x-۱)^۲+(\sqrt{۲})^۲} \\ &= \frac{x^۲}{۲}+۲x+\frac{۱}{۲}\ln|x^۲-۲x+۳|-۵\frac{\sqrt{۲}}{۲}\arctan\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x-۱)\right)+C \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۵) ب) فرض کنیم $u=۴-x^۲$، پس $x^۲=۴-u$، $۲xdx=-du$ و

$$\int ۲x\sqrt{۴-x^۲}dx=\int -\sqrt{u}du=\frac{-u^{۳/۲}}{۳/۲}+C=\frac{-۲}{۳}(۴-x^۲)^{۳/۲}+C$$

پاسخ مسأله ۵) ج) برای از میان بردن $x-۱$ در مخرج کسر، فرض می‌کنیم $x-۱=\frac{۱}{u}$ پس $dx=\frac{-du}{u^۲}$، $x=\frac{u+۱}{u}$ و

$$\begin{aligned} I &= \int\frac{dx}{(x-۱)\sqrt{x^۲+x+۱}}=\int\frac{-\frac{du}{u^۲}}{\frac{۱}{u}\sqrt{(\frac{u+۱}{u})^۲+(\frac{u+۱}{u})+۱}}\\ &= -\int\frac{du}{\sqrt{۳u^۲+۳u+۱}}\end{aligned}$$

عبارت زیر رادیکال را به شکل $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲+\left[\sqrt{۳}\left(u+\frac{۱}{۲}\right)\right]^۲$ می‌توان نوشت. پس فرض می‌کنیم $\frac{۱}{۲}V=\sqrt{۳}(u+\frac{۱}{۲})$. در نتیجه $u=\frac{-۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۶}V$، $du=\frac{\sqrt{۳}}{۶}dV$ و

$$I=-\int\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۶}dV}{\sqrt{\frac{۱}{۴}V^۲+\frac{۱}{۴}}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\int\frac{dV}{\sqrt{V^۲+۱}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\ln\left|V+\sqrt{V^۲+۱}\right|+C$$

بنابراین، چون $V=\sqrt{۳}(۲u+۱)=\sqrt{۳}\left(\frac{۲}{x-۱}+۱\right)=\sqrt{۳}\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)$، داریم:

$$I=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\ln\left|\sqrt{۳}\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)+\sqrt{۳\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^۲+۱}\right|+C$$

یادآوری و تکمیل: از قبل به خاطر دارید که:

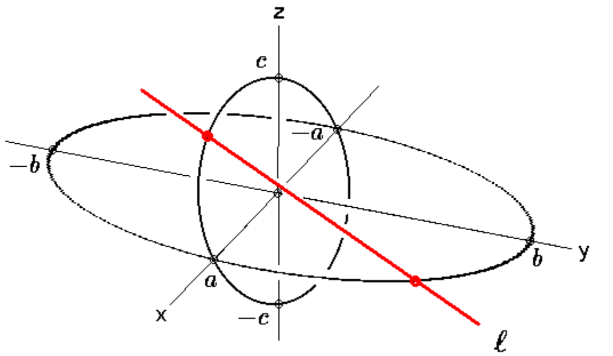
$$\int\frac{du}{\sqrt{u^۲+a^۲}}=\sinh^{-۱}\left(\frac{u}{a}\right)=\ln\left|u+\sqrt{u^۲+a^۲}\right|$$

پاسخ مسأله ۵) د) فرض می‌کنیم $u=\pi-x$، پس $x=\pi-u$، $dx=-du$ و $\begin{array}{c|cc} x & ۰ & \pi \\ \hline u & \pi & ۰\end{array}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} I &= \int_۰^\pi\frac{x\sin x}{۱+\cos^۲x}dx=\int_\pi^۰\frac{(\pi-u)\sin u}{۱+(-\cos u)^۲}(-du)\\ &= \int_۰^\pi\frac{(\pi-u)\sin u}{۱+\cos^۲u}du=\pi\int_۰^\pi\frac{\sin udu}{۱+\cos^۲u}-\int_۰^\pi\frac{u\sin u}{۱+\cos^۲u}du\\ &= \pi\int_۰^\pi\frac{\sin xdx}{۱+\cos^۲x}-I\end{aligned}$$

بنابراین

$$I=\frac{\pi}{۲}\int_۰^\pi\frac{\sin xdx}{۱+\cos^۲x}$$



شکل ۹: پاسخ مسالهٔ ۷

برای اتمام کار، انتگرال حاصل را با تغییر متغیر $t = \cos x$ حل می‌کنیم. در اینصورت $dt = -\sin x dx$ و $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \pi \\ \hline t & 1 & -1 \end{array}$. بنابراین

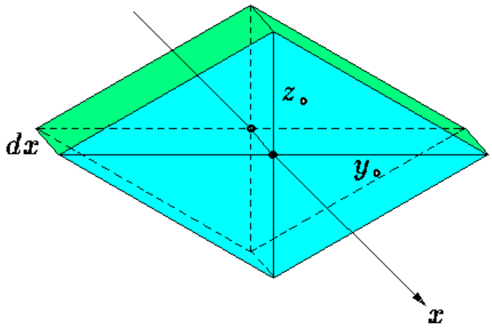
$$I = \frac{\pi}{2} \int_{1}^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} [\arctan(t)]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}$$

پاسخ مسأله ٦) بنابه فرمول محاسبهٔ طول قوس یک منحنی پارامتری:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{[a(t-\sin t)']^2 + [a(1-\cos t)']^2} dt \\ &= a \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = a \int_{0}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\ &= 2a \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \left(\frac{t}{2}\right)} dt = 2a \int_{0}^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \left[-4\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) وضعیت تشریح شده در صورت مسأله همانند شکل ۹ می‌باشد، که در آن خط l متحرک است. بازهٔ $[x_\circ, x_\circ + dx]$ را بر محور xها در نظر گرفته و توسط ضخامت $x = x_\circ$ و $x = x_\circ + dx$، جسم مورد نظر را برش می‌دهیم. یک جسم به شکل لوزی حاصل می‌گردد (به شکل ۱۰ توجه شود). از معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ نتیجه می‌شود که نیم قطر اول این لوزی برابر $y_\circ = b\sqrt{1 - \frac{x_\circ^2}{a^2}}$ است و از معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ نتیجه می‌گردد که نیم قطر دوم آن برابر $z_\circ = c\sqrt{1 - \frac{x_\circ^2}{a^2}}$ است. بنابراین، حجم المان جدا شده برابر است با:

$$dV = y_\circ z_\circ dx = bc\left(1 - \frac{x_\circ^2}{a^2}\right) dx$$



شکل ۱۰: المان‌گیری در پاسخ مسالهٔ ۷

و بنابراین حجم مورد نظر برابر است با

$$V=\int_{-a}^{a}dV=bc\int_{-a}^{a}\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big)dx=bc\Big[x-\frac{x^3}{3a^2}\Big]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}abc$$

پاسخ مسأله ۸) الف) ضریب جملهٔ عمومی این سری، برابر $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ است. پس اگر R شعاع همگرایی آن باشد داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)=1$$

و لذا $R=1$. بنابراین، اگر $|x-1|<1$ (یا بطور معادل $0<x<2$) آنگاه سری همگرا است و اگر $|x-1|>1$ (یا بطور معادل "$x>2$ یا $x<0$") آنگاه سری واگرا است. بعلاوه، اگر $|x-1|=1$، آنگاه "$x=2$ یا $x=0$". در حالت $x=2$ به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$ می‌رسیم که واگرا است، زیرا حد جملهٔ عمومی آن $e\neq 0$ است. در حالت $x=0$ به سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})^n$ می‌رسیم که واگرا است، زیرا حد قدرمطلق جملهٔ عمومی آن $e\neq 0$ می‌باشد. پس در مجموع، فاصلهٔ همگرایی سری $(0,2)$ است.

پاسخ مسأله ۸) ب) $(a$ چون تابع $f(x)=1/(x(\ln x)\{\ln(\ln x)\}^2)$ بر بازهٔ $[4,+\infty)$ مثبت و نزولی است، همگرایی یا واگرایی سری داده شده با انتگرال ناسرهٔ $\int_4^{\infty}f(x)dx$ یکی

است؛ اما با فرض $u=\ln(\ln x)$ داریم: $du=\dfrac{dx}{x\ln x}$ بنابراین:

$$\int_{۴}^{\infty} f(x)dx=\lim_{a\to\infty}\int_{۴}^{a}\frac{dx}{x\ln x(\ln(\ln x))^{۲}}=\lim_{a\to\infty}\int_{\ln(\ln ۴)}^{\ln(\ln a)}\frac{du}{u^{۲}}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\left[\frac{-۱}{u}\right]_{\ln(\ln ۴)}^{\ln(\ln a)}=-\lim_{a\to\infty}\left(\frac{۱}{\ln(\ln a)}-\frac{۱}{\ln(\ln ۴)}\right)=\frac{۱}{\ln(\ln ۴)}$$

پس انتگرال (و لذا سری) همگرا است.

پاسخ مسأله ۸) ب) b) از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم:

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(۲n+۲)!}{\{(n+۱)!\}^{۲}}}{\frac{(۲n)!}{(n!)^{۲}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(۲n+۱)(۲n+۲)}{(n+۱)^{۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(۲+\frac{۱}{n})(۲+\frac{۲}{n})}{(۱+\frac{۱}{n})^{۲}}=۴$$

چون $l>۱$، پس سری داده شده واگرا می‌باشد.

پاسخ مسأله ۸) ب) c) از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(۲n)^n}{(n+۱)^{n+۱}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲n}{(n+۱)\sqrt[n]{n+۱}}$$
$$=۲\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+۱}\right)\div\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+۱}\right)=۲(۱)\div(۱)=۲$$

که چون $l>۱$، پس سری داده شده واگرا می‌باشد.

پاسخ مسأله ۹) الف) ابتدا $z=۱+\sqrt{۳}i$ را به شکل قطبی می‌نویسیم:

$$r=\sqrt{۱^{۲}+(\sqrt{۳})^{۲}}=۲ \qquad \theta=\arctan(\frac{\sqrt{۳}}{۱})=\frac{\pi}{۳}$$

بنابراین $z=۲e^{\pi i/۳}$. بعلاوه $۱-\sqrt{۳}i=\overline{z}=\overline{۲e^{\pi i/۳}}=۲e^{-\pi i/۳}$ و در نتیجه

$$\left(\frac{۱+\sqrt{۳}i}{۱-\sqrt{۳}i}\right)^{۱۰}=\left(\frac{۲e^{\pi i/۳}}{۲e^{-\pi i/۳}}\right)^{۱۰}=\left(e^{۲\pi i/۳}\right)^{۱۰}=e^{۲۰\pi i/۳}=e^{۶\pi i+۲\pi i/۳}$$
$$=(e^{۲\pi i})^{۳}e^{۲\pi i/۳}=۱^{۳}\left(\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)+i\sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)\right)=\frac{-۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

که در اینجا $\alpha=\frac{-۱}{۲}$ و $\beta=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌باشد.

پاسخ مسأله ۹) ب) چون $1e^{\circ i} = 1$، بنابه قضیه دموآور، ریشه‌های n ام عدد یک برابرند با

$$\sqrt[n]{1} = 1e^{\frac{\circ + 2k\pi i}{n}} = \left(e^{2\pi i/n}\right)^k \qquad (k = \circ, 1, \cdots, n-1)$$

پس $k_\circ$ ای وجود دارد که $1 \leq k_\circ \leq n-1$ و $w = \left(e^{2\pi i/n}\right)^{k_\circ}$ در اینصورت:

$$w^l = \left\{\left(e^{2\pi i/n}\right)^{k_\circ}\right\}^l = e^{2lk_\circ \pi i/n} \qquad (*)$$

چون n اول است و $k_\circ \neq \circ$، بنابه قضیهٔ فرما (به پیمانهn)$lk_\circ \equiv 1$ یعنی $m_\circ$ ای وجود دارد که $k_\circ^{n-1} = nm_\circ + 1$، پس با فرض $l = n-2$ در رابطه $(\star)$ داریم:

$$w^l = e^{2k_\circ^{n-1}\pi i/n} = \left(e^{2\pi i}\right)^{m_\circ} e^{2\pi i/n} = e^{2\pi/n}$$

و لذا k امین ریشه n ام ریشه یک برابر $(w^l)^k = w^{kl}$ است. در مورد اثبات اتحاد داده شده داریم:

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = \frac{1 - 1}{1 - w} = \circ$$

زیرا w ریشه n ام یک است و لذا $w^n = 1$ و بنابه فرض $w \neq 1$ می‌باشد.

امتحان نهم

توضیح: در هر قسمت تنها به یکی از پرسشهای (الف) یا (ب) پاسخ دهید.

(۱) الف) مشتق تابع پارامتری زیر را محاسبه نمائید:

$$x = \arctan(\sqrt{t^2 - 2}), \quad y = \ln(\sqrt{t^2 - 1})$$

ب) اگر $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^m$ باشد ثابت کنید:

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - m^2 y = 0$$

(۲) مطلوبست محاسبه حدود

الف) $\lim_{x \to 0^+} \left((\tan x)^{1/\ln x} \right)$ ب) $\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}}}{\sqrt{t + 1}}$

(۳) الف) ریشه‌های معادله $8iz^3 - 27 = 0$ را بدست آورید.
ب) ریشه‌های چهارم عدد مختلط $\frac{1+i}{1-i}$ را محاسبه نمائید.

(۴) الف) به ازاء مقادیر مختلف α همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m!)^2}{(2m)!} |2\alpha|^m$ را تحقیق نمائید.
ب) مقدار سری $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m(m+1)(m+2)}$ را محاسبه نمائید.

(۵) الف) تابع $F(x) = (1 - x)e^{-x}$ را با سری مکلورن بسط دهید.
ب) بسط مکلورن تابع $\ln(1 - x)$ را بدست آورده، سپس انتگرال زیر را محاسبه نمائید:
$$\int \frac{\ln(1 - x)}{x} dx$$

(٦) الف) مطلوبست محاسبهٔ

الف) $\int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 4} dx$ ب) $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$

(۷) الف) طول قوس منحنی نمایش تابع $\rho = \frac{1}{1 + \cos\theta}$ را در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ محاسبه کنید.
ب) حجم حاصل از دوران سطح محصور بین دو منحنی $y = \sqrt{x}$ و $y = x^3$ حول محور طولها را محاسبه نمائید.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) الف) به کمک فرمول مشتق از تابع پارامتری داریم:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{(\sqrt{t^۲-۱})'}{\sqrt{t^۲-۱}}}{\frac{(\sqrt{t^۲-۲})'}{۱+(\sqrt{t^۲-۱})^۲}} = \frac{\frac{۲t/(۲\sqrt{t^۲-۱})}{\sqrt{t^۲-۱}}}{\frac{۲t/(۲\sqrt{t^۲-۲})}{۱+(t^۲-۲)}} \\ &= \frac{\frac{t}{t^۲-۱}}{\frac{t}{(t^۲-۱)\sqrt{t^۲-۲}}} = \sqrt{t^۲-۲}\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۱) ب) چون $y=(x+\sqrt{x^۲+۱})^m$، پس:

$$\begin{aligned}y' &= m(x+\sqrt{x^۲+۱})'(x+\sqrt{x^۲+۱})^{m-۱} \\ &= m(۱+\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}})(x+\sqrt{x^۲+۱})^{m-۱} \\ &= \frac{m}{\sqrt{x^۲+۱}}(x+\sqrt{x^۲+۱})(x+\sqrt{x^۲+۱})^{m-۱} = \frac{m}{\sqrt{x^۲+۱}}y\end{aligned}$$

بعلاوه داریم:

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{-mx}{(\sqrt{x^۲+۱})^۳}y+\frac{m}{\sqrt{x^۲+۱}}y' \\ &= \frac{-mx}{(\sqrt{x^۲+۱})^۳}y+\frac{m^۲}{x^۲+۱}y \\ &= \frac{my}{(\sqrt{x^۲+۱})^۳}(m\sqrt{x^۲+۱}-x)\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}&(x^۲+۱)y''+xy'-m^۲y= \\ &\quad = \frac{my}{\sqrt{x^۲+۱}}(m\sqrt{x^۲+۱}-x)+\frac{mxy}{\sqrt{x^۲+۱}}-m^۲y \\ &\quad = \frac{my}{\sqrt{x^۲+۱}}\{(m\sqrt{x^۲+۱}-x)+x-m\sqrt{x^۲+۱}\}=۰\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۲) الف) فرض کنیم $y=(\tan x)^{۱/\ln x}$ و $A=\lim_{x\to ۰^+} y$ در اینصورت:

$$\ln A = \lim_{x\to ۰^+}\ln y = \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\ln x}\ln(\tan x) = \lim_{x\to ۰^+}\frac{\ln(\tan x)}{\ln x}$$

که به حالت مبهم $\frac{-\infty}{-\infty}$ می‌انجامد. پس به کمک قضیه هوپیتال داریم:

$$\ln A = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\frac{۱/\cos^۲ x}{\tan x}}{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\frac{۱}{\cos x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

بنابراین $A = e^۱ = e$.

پاسخ مسأله ۲) ب) حد مورد نظر به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ می‌انجامد. با فرض $u = \frac{۱}{t}$ داریم:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}}{\sqrt{t+۱}} = \lim_{u\to ۰} \frac{\sqrt{\frac{۱}{u}+\sqrt{\frac{۱}{u}+\sqrt{\frac{۱}{u}}}}}{\sqrt{\frac{۱}{u}+۱}}$$
$$= \lim_{u\to ۰} \frac{\sqrt{۱+\sqrt{u+\sqrt{u^۳}}}}{\sqrt{۱+u}} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

پاسخ مسأله ۳) الف) از $۸iz^۳ + ۲۷ = ۰$ نتیجه می‌گیریم که:

$$z^۳ = \frac{۲۷}{۸i} = \frac{۲۷i}{۸i^۲} = -\frac{۲۷}{۸}i$$

اگر $w = \frac{-۲۷}{۸}i$، آنگاه $|w| = \frac{۲۷}{۸}$ و $\arg(w) = \frac{۳\pi}{۲}$ بنابراین: $w = \frac{۲۷}{۸}e^{۳\pi i/۲}$ پس، بنابه قضیهٔ دموآور داریم:

$$z \quad = \quad \sqrt[۳]{w} = \sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۸}e^{\frac{۳\pi/۲+۲k\pi}{۳}i}} = \frac{۳}{۲}e^{(\frac{\pi}{۲}+k\frac{۲\pi}{۳})i}$$

که در آن $k = ۰, ۱, ۲$. بنابراین،

$$= \begin{cases} \frac{۳}{۲}e^{\pi i/۲} = \frac{۳}{۲}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۲}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right)\right) = \frac{۳}{۲}i \\ \frac{۳}{۲}e^{۷\pi i/۶} = \frac{۳}{۲}e^{\pi i}\cdot e^{\pi i/۶} \\ \qquad = \frac{۳}{۲}(-۱)\left(\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)\right) = \frac{-۳}{۴}(\sqrt{۳}+i) \\ \frac{۳}{۲}e^{۱۱\pi i/۶} = \frac{۳}{۲}e^{۲\pi i}\cdot e^{-\pi i/۶} \\ \qquad = \frac{۳}{۲}\times ۱\left(\cos\left(\frac{-\pi}{۶}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{۶}\right)\right) = \frac{۳}{۴}(\sqrt{۳}-i) \end{cases}$$

پاسخ مسأله ۳) ب) اگر $w = ۱+i$، آنگاه $|w| = \sqrt{۱+۱}$ و $\arg(w) = \arctan(۱) = \frac{\pi}{۴}$ و لذا: $w = \sqrt{۲}e^{\pi i/۴}$. بعلاوه: $\overline{w} = \overline{i} - ۱ = \sqrt{۲}e^{-\pi i/۴}$. بنابراین:

$$\frac{۱+i}{۱-i} = \frac{\sqrt{۲}e^{\pi i/۴}}{\sqrt{۲}e^{-\pi i/۴}} = e^{\pi i/۲}$$

پس بنا به قضیه دموآور داریم:

$$\begin{aligned}\sqrt[۴]{\frac{۱+i}{۱-i}} &= \sqrt[۴]{۱}e^{\frac{\pi/۲+۲k\pi}{۴}i} = e^{(\pi/۸+k\pi/۲)i} \\ &= e^{\pi i/۸}\left(e^{\pi i/۲}\right)^k = \left(\cos\left(\frac{\pi}{۸}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۸}\right)\right)\cdot i^k\end{aligned}$$

که در آن $k = ۰, ۱, ۲, ۳$. اما برای محاسبه $\cos\left(\frac{\pi}{۸}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{۸}\right)$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{۸}\right) &= \sqrt{\frac{۱+\cos(۲\frac{\pi}{۸})}{۲}} = \sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} \\ \sin\left(\frac{\pi}{۸}\right) &= \sqrt{\frac{۱-\cos(۲\frac{\pi}{۸})}{۲}} = \sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}\end{aligned}$$

از طرفی چون $i^۰ = ۱$، $i^۱ = i$، $i^۲ = -۱$ و $i^۳ = -۱$ داریم:

$$= \begin{cases}\left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}\right)(۱) = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} \\ \left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}\right)(i) = -\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} \\ \left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}\right)(-۱) = -\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} \\ \left(\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}\right)(-i) = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}\end{cases}$$

پاسخ مسأله ۴) الف) از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}l &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\{(n+۱)!\}^۲}{(۲n+۲)!}|۲\alpha|^{n+۱}}{\frac{(n!)^۲}{(۲n)!}|۲\alpha|^n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)^۲\times ۲|\alpha|}{(۲n+۱)(۲n+۲)} \\ &= ۲|\alpha|\lim_{n\to\infty}\frac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^۲}{\left(۲+\frac{۱}{n}\right)\left(۲+\frac{۲}{n}\right)} = ۲|\alpha|\frac{۱^۲}{۲\times ۲} = \frac{|\alpha|}{۲}\end{aligned}$$

پس اگر $1 > \frac{|\alpha|}{2}$، آنگاه سری همگرا است و اگر $1 < \frac{|\alpha|}{2}$، آنگاه سری واگرا می‌باشد. بعلاوه در حالت $1 = \frac{|\alpha|}{2}$، سری داده شده به شکل $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m!)^2}{(2m)!} 4^m$ تبدیل می‌گردد، که یک سری همگرا است. زیرا اولاً با جملات مثبت است و در ثانی از بالا کراندار می‌باشد:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n \times 1 \times 2 \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times n \times (n+1) \times \cdots \times (2n)} 4^n \\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} 4^n = \frac{n! 4^n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} \end{aligned}$$

که همواره مثبت است. با استفاده از آزمون رابه داریم:

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{(n+1)! 4^{n+1}}{(2n+1)\cdots(2n+2)} . \frac{(n+1)\cdots(2n)}{n! 4^n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+1} = -\frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

بنابراین، این سری همگرا است. نتیجه اینکه، سری داده شده وقتی و تنها وقتی همگرا است که $\frac{|\alpha|}{2} \le 1$، یعنی $-2 \le \alpha \le 2$ می‌باشد.

پاسخ مسأله ۴) ب) ابتدا کسر $\frac{1}{2m(m+1)(m+2)}$ را تجزیه می‌کنیم: با فرض

$$\frac{1}{2m(m+1)(m+2)} = \frac{A}{2m} + \frac{B}{m+1} + \frac{C}{m+2}$$

داریم $1 = A(m+1)(m+2) + 2Bm(m+2) + 2Cm(m+1)$. با قرار دادن $m = 0$، $m = -1$ و $m = -2$ در تساوی بالا به ترتیب بدست می آوریم $A = \frac{1}{2}$، $B = \frac{-1}{2}$ و $C = \frac{1}{4}$ بنابراین:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m(m+1)(m+2)} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2m(m+1)(m+2)} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \left\{ \frac{1}{m} + \frac{-2}{m+1} + \frac{1}{m+2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{N\to\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{m}\right) - 2 \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{m+1}\right) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{m+2}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{۱}{۴} \lim_{N\to\infty} \left\{ \sum_{m=۱}^{N} \left(\frac{۱}{m}\right) - ۲\sum_{m=۲}^{N+۱} \left(\frac{۱}{m}\right) + \sum_{m=۳}^{N+۲} \left(\frac{۱}{m}\right) \right\}$$
$$= \frac{۱}{۴} \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{N+۱} + \frac{۱}{N+۱} + \frac{۱}{N+۲} \right\} = \frac{۱}{۸}$$

پاسخ مسأله ۵) الف) با توجه به بسط مکلورن تابع $y = e^x$ (یعنی، $e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲} + \cdots$) داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= (۱-x)e^{-x} = (۱-x)\left(۱ + (-x) + \frac{(-x)^۲}{۲} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots\right) \\ &= ۱ - x + \frac{x^۲}{۲} - \cdots + (-۱)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &\qquad \cdots - x + x^۲ - \frac{x^۳}{۲} + \cdots + (-۱)^{n+۱}\frac{x^{n+۱}}{n!} + \cdots \\ &= ۱ - ۲x + \frac{۳}{۲}x^۲ - \frac{۲}{۳}x^۳ + \cdots + (-۱)^n \frac{n+۱}{n!} x^n + \cdots \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۵) ب) با توجه به $\ln(۱-x) = x + \frac{x^۲}{۲} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$ داریم:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(۱-x)}{x} dx &= \int \left\{ ۱ + \frac{x}{۲} + \cdots + \frac{x^{n-۱}}{n} + \cdots \right\} dx \\ &= x + \frac{x^۲}{۴} + \cdots + \frac{x^n}{n^۲} + \cdots + C \end{aligned}$$

که این فرمول بر دامنهٔ همگرایی سری برقرار است. (یعنی، بر بازهٔ $(-۱, ۱)$)

پاسخ مسأله ٦) الف) چون درجه صورت بیشتر از درجه مخرج است، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\int_{\circ}^{۱} \frac{x^۴}{x^۲+۴} dx = \int_{\circ}^{۱} \left\{ x^۲ - ۴ + \frac{۱٦}{x^۲+۴} \right\} dx$$
$$= \left[\frac{x^۳}{۳} - ۴x + ۱٦ \times \frac{۱}{۲} \arctan\left(\frac{x}{۲}\right) \right]_{\circ}^{۱} = ۸ \arctan\left(\frac{۱}{۲}\right) - \frac{۱۱}{۳}$$

پاسخ مسأله ٦) ب) از روش جزء به جزء با فرض $dv = dx$ و $u = \ln(x + \sqrt{x^۲+۱})$ استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$du = \frac{۱ + x/\sqrt{x^۲+۱}}{x + \sqrt{x^۲+۱}} dx = \frac{dx}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

و $V=x$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned}\int \ln(x+\sqrt{x^۲+۱})dx &= x\ln(x+\sqrt{x^۲+۱})-\int x\frac{dx}{\sqrt{x^۲+۱}}\\ &= x\ln(x+\sqrt{x^۲+۱})-\sqrt{x^۲+۱}+C\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) الف) به کمک فرمول محاسبهٔ طول قوس توابع قطبی، داریم:

$$\begin{aligned}\ell &= \int_{\theta_۱}^{\theta_۲}\sqrt{[r'(\theta)]^۲+[r(\theta)]^۲}d\theta\\ &= \int_۰^{\pi/۲}\sqrt{\left[\frac{\sin\theta}{(۱+\cos\theta)^۲}\right]^۲+\left[\frac{۱}{۱+\cos\theta}\right]^۲}d\theta\\ &= \int_۰^{\pi/۲}\sqrt{\frac{\sin^۲\theta+۱+۲\cos\theta+\cos^۲\theta}{(۱+\cos\theta)^۴}}d\theta\\ &= \int_۰^{\pi/۲}\sqrt{\frac{۲+۲\cos\theta}{(۱+\cos\theta)^۴}}d\theta=\sqrt{۲}\int_۰^{\pi/۲}\frac{d\theta}{\sqrt{(۱+\cos\theta)^۳}}\\ &= \frac{۱}{۲}\int_۰^{\pi/۲}\frac{d\theta}{\cos^۳(\frac{\theta}{۲})}=\frac{۱}{۲}\int_۰^{\pi/۲}\frac{\cos^۳(\frac{\theta}{۲})\,d\theta}{\cos^۴(\frac{\theta}{۲})}\end{aligned}$$

که با فرض $u=\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$ داریم $du=\cos\left(\frac{\theta}{۲}\right)d\theta$ و $\begin{array}{c|cc}\theta & ۰ & \pi/۲\\ \hline u & ۰ & \sqrt{۲}/۲\end{array}$. در نتیجه:

$$\ell=\frac{۱}{۲}\int_۰^{\sqrt{۲}/۲}\frac{du}{(u^۲-۱)^۲}$$

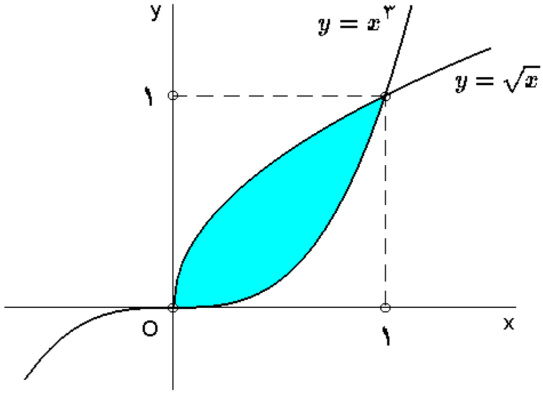
از روش تفکیک کسر استفاده می‌کنیم. چون $(u^۲-۱)^۲=(u-۱)^۲(u+۱)^۲$، فرض می‌کنیم $\frac{۱}{(u^۲-۱)^۲}=\frac{A}{u-۱}+\frac{B}{(u-۱)^۲}+\frac{C}{u+۱}+\frac{D}{(u+۱)^۲}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}&A(u-۱)(۱+u)^۲+B(۱+u)^۲\\ &\quad +C(u-۱)(u+۱)^۲+D(u+۱)^۲=۱\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{r}A+B+C+D=۰\\ A-۲B+C+۲D=۰\\ A+C=۰\\ -A+B+C+D=۱\end{array}\right.\Rightarrow A=-\frac{۱}{۴},\ B=C=D=\frac{۱}{۴}$$

و با قرار دادن در ℓ داریم

$$\ell=\frac{۱}{۸}\int_۰^{\sqrt{۲}/۲}\left\{\frac{-۱}{u-۱}+\frac{۱}{(u-۱)^۲}+\frac{۱}{u+۱}+\frac{۱}{(u+۱)^۲}\right\}du$$



شکل ۱۱: پاسخ مسألهٔ ۷

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{۱}{۸}\ln(u-۱) - \frac{۱}{u-۱} + \frac{۱}{۸}\ln(u+۱) - \frac{۱}{u+۱} \right]_۰^{\sqrt{۲}/۲} \\ &= \frac{\sqrt{۲}}{۴} + \frac{۱}{۸}\ln\left(۲\sqrt{۲}+۴\right) \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) ب) دو منحنی داده شده در نقاط $x = ۰$ و $x = ۱$ یکدیگر را قطع می‌کنند زیرا

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^۳ \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = x^۳ \Rightarrow \sqrt{x}(۱ - x^{۵/۲}) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = ۰ \\ ۱ - x^{۵/۲} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases}$$

بعلاوه، در بازهٔ $[۰, ۱]$ منحنی $y = x^۳$ زیر منحنی $y = \sqrt{x}$ قرار دارد پس باید حجم تولید شده از دوران $x^۳$ را از حجم تولید شده از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$ کسر کنیم (به شکل ۱۱ توجه شود):

$$\begin{aligned} V &= V_۱ - V_۲ = \pi\int_۰^۱ (\sqrt{x})^۲ dx - \pi\int_۰^۱ (x^۳)^۲ dx \\ &= \pi\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_۰^۱ - \pi\left[\frac{x^۷}{۷}\right]_۰^۱ = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۷} = \frac{۵\pi}{۱۴} \end{aligned}$$

امتحان دهم

(۱) α و β را طوری بیابید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$\frac{(1+i)^4(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^4(1-i\sqrt{3})^3}=\alpha+i\beta$$

(۲) ثابت کنید که تابع $f(x)=4x^5+3x^3+3x-2$ در فاصلهٔ $[0,1]$ تنها یک ریشه دارد.

(۳) تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=0$ طوری تعریف کنید که $f(x)$ در $x=0$ پیوسته باشد و به ازای هر $x\neq 0$ ای $f(x)=x\tan(\frac{\pi}{2-x})$.

(۴) با استفاده از آزمون انتگرال، در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n(1+\ln^3 n)}$ بحث کنید.

(۵) بدون محاسبه $\int_1^{\infty}\frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2(1+e^x)}dx$، در همگرایی یا واگرایی آن بحث کنید.

(٦) در وجود یا عدم وجود هر یک از حدود زیر بحث کنید و آنهایی که دارای حد هستند محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0^+}(|\ln x|)^{1/x}$ ب) $\lim_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}$

ج) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ (که در آن n یک عدد طبیعی است)

(۷) هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\int\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}dx$ ب) $\int(\ln x)^2dx$ ج) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$

(۸) حد زیر را به کمک انتگرال معین محاسبه نمائید.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right\}$$

(۹) بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ را بیابید و فاصلهٔ همگرایی آن را مشخص کنید.

(۱۰) مساحت سطح حاصل از دوران سهمی $y^2=x$ حول محور x از $x=0$ تا $x=2$ را محاسبه کنید.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) اگر $z=1+i\sqrt{3}$، آنگاه:

$$|z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,\quad \arg(z)=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ z=2e^{\pi i/3}$$

$$1-i\sqrt{3}=\overline{1+i\sqrt{3}}=\overline{e^{\pi i/3}}=\bar{z}=e^{-\pi i/3}$$

اگر $w = ۱ + i$ باشد آنگاه:

$$|w| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}, \quad \arg(w) = \arctan\left(\frac{۱}{۱}\right) = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow w = \sqrt{۲}e^{\pi i/۴}$$
$$۱ - i = \overline{۱ + i} = \overline{e^{\pi i/۲}} = \bar{w} = e^{-\pi i/۴}$$

و در نتیجه:

$$\frac{(۱+i)^۴(۱+i\sqrt{۳})^۳}{(۱-i)^۴(۱-i\sqrt{۳})^۳} = \frac{(w)^۴(z)^۳}{(\overline{w})^۴(\overline{z})^۳} = \frac{\left(\sqrt{۲}e^{\pi i/۴}\right)^۴\left(۲e^{\pi i/۳}\right)^۳}{\left(\sqrt{۲}e^{-\pi i/۴}\right)^۴\left(۲e^{-\pi i/۳}\right)^۳}$$
$$= \frac{\left(۴e^{\pi i}\right)\left(۸e^{\pi i}\right)}{\left(۴e^{-\pi i}\right)\left(۸e^{-\pi i}\right)} = \frac{e^{۲\pi i}}{e^{-۲\pi i}} = e^{۴\pi i} = ۱$$

که در اینجا $\alpha = ۱$ و $\beta = ۰$ می‌باشد.

پاسخ مسأله ۲) چون f بر بازهٔ $[۰, ۱]$ پیوسته است (زیرا چندجمله‌ای است) $f(۱) = ۸ > ۰$ و $f(۰) = -۲ < ۰$، پس f حداقل یک ریشه بر بازهٔ $(۰, ۱)$ دارد. فرض کنیم $۰ < a < b < ۱$ دو ریشه f باشند (فرض خلف)، پس چون f بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر است و $f(a) = f(b) = ۰$، بنا به قضیه رُل، نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد که $f'(c) = ۰$. یعنی $۲۰c^۴ + ۹c^۲ + ۳ = ۰$ که محال است. زیرا عبارت سمت چپ همواره مثبت و مخالف صفر می‌باشد.

پاسخ مسأله ۳) ابتدا حد تابع داده شده را در نقطهٔ $x = ۰$ محاسبه می‌کنیم. به کمک قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۰} x\tan\left(\frac{\pi}{۲-x}\right) = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{\cot\left(\frac{\pi}{۲-x}\right)} \overset{\text{ه}}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{\frac{-\pi/(۲-x)^۲}{\sin^۲\left(\pi/(۲-x)\right)}}$$
$$= \frac{-۱}{\pi}\left(\lim_{x\to ۰}(۲-x)^۲\right)\left(\lim_{x\to ۰}\sin^۲\left(\frac{\pi}{۲-x}\right)\right) = \frac{-۱}{\pi}(۲)^۲(۱)^۲ = \frac{-۴}{\pi}$$

پس برای ساختن تابعی پیوسته (اصلاح تابع)، کافی است تعریف کنیم $f(۰) = \frac{-۴}{\pi}$.

پاسخ مسأله ۴) تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x(۱+\ln^۳ x)}$ را بر بازهٔ $[۱, \infty)$ در نظر می‌گیریم. روشن است که f بر $[۱, \infty)$ مثبت است و بعلاوه نزولی می‌باشد، زیرا:

$$f'(x) \quad = \quad \frac{\left(\frac{۱}{x}\right)(x(۱+\ln^۳ x)) - \left(۱+\ln^۳ x + x\frac{۳\ln^۲ x}{x}\right)(\ln x)}{(x(۱+\ln^۳ x))^۲}$$

$$= \quad \frac{-۳\ln^۳ x}{x^۲(۱+\ln^۳ x)^۲}$$

عبارت فوق بر بازهٔ $[۱,\infty)$ منفی است و لذا f بر آن نزولی می‌باشد. بنابراین همگرایی یا واگرایی سری داده شده به معنی همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسرهٔ $\int_۱^\infty f(x)dx$ است؛ اما با فرض $u=\ln x$ داریم $du=\frac{dx}{x}$ و $\begin{array}{c|cc} x & ۱ & a \\ \hline u & ۰ & \ln a\end{array}$. بنابراین،

$$\int_۱^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_۱^a \frac{\ln x dx}{x(۱+\ln^۳ x)} = \lim_{a\to\infty}\int_۱^{\ln a}\frac{udu}{۱+u^۳} \le \lim_{a\to\infty}\int_۱^{\ln a}\frac{udu}{۰+u^۳}$$
$$\le \lim_{a\to\infty}\int_۱^{\ln a}\frac{du}{u^۲} = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-۱}{u}\right]_۱^{\ln a} = ۱-\lim_{a\to\infty}\frac{۱}{\ln a} = ۱$$

پس انتگرال ناسرهٔ $\int_۱^\infty f(x)dx$ همگرا است و بنابراین سری $\sum_{n=۱}^\infty f(n)$ نیز همگرا می‌باشد. یعنی سری داده شده همگرا است.

پاسخ مسأله ۵) انتگرال داده شده مطلقاً همگرا، و بنابراین همگرا است زیرا:

$$\int_۱^\infty \left|\frac{\cos(\frac{۱}{x})}{x^۲(۱+e^x)}\right| dx = \lim_{a\to\infty}\int_۱^a \frac{|\cos(\frac{۱}{x})|}{x^۲(۱+e^x)}dx$$
$$\le \lim_{a\to\infty}\int_۱^a \frac{۱}{x^۲(۱+۰)}dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-۱}{x}\right]_۱^a = ۱-\lim_{a\to\infty}\frac{۱}{a} = ۱$$

پاسخ مسأله ۶) الف) با فرض $y=|\ln x|^{۱/x}$ و $A=\lim_{x\to ۰+} y$ داریم:

$$\ln A = \lim_{x\to ۰+}\ln y = \lim_{x\to ۰+}\frac{۱}{x}\ln|\ln x| = \lim_{x\to ۰+}\frac{\ln|\ln x|}{x}$$

که به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌انجامد. پس به کمک قضیه هوپیتال، داریم:

$$\ln A \overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to ۰+}\frac{\operatorname{sgn}(\ln x)\frac{۱}{x}}{\ln x} \overset{(۱)}{=} \lim_{x\to ۰+}\frac{\frac{-۱}{x}}{\ln x} \overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to ۰+}\frac{\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۱}{x}} \lim_{x\to ۰+}\frac{۱}{x} = +\infty$$

یعنی، حد A وجود ندارد. توضیح اینکه در تساوی (۱)، از این نکته استفاده شده است که تابع $\ln x$ برای مقادیر x کوچکتر از یک منفی می‌باشد.

پاسخ مسأله ۶) ب) با فرض $y=(\tan x)^{\tan(۲x)}$ و $A=\lim_{x\to\pi/۴} y$ داریم:

$$\ln A = \lim_{x\to\pi/۴}\ln y = \lim_{x\to\pi/۴}\tan(۲x)\ln(\tan x) = \lim_{x\to\pi/۴}\left(\frac{\ln(\tan x)}{\cot(۲x)}\right)$$

که به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌انجامد. پس به کمک قضیهٔ هوپیتال داریم:

$$\ln A \overset{\text{ه}}{=} \lim_{x\to\pi/۴} \frac{\frac{۱/\cos^۲ x}{\tan x}}{\frac{-۲}{\sin^۲(۲x)}} = \frac{-۱}{۲} \lim_{x\to\pi/۴} \frac{\sin^۲(۲x)}{\tan x \cos^۲ x}$$

$$= \frac{-۱}{۲} \lim_{x\to\pi/۴} \frac{(۲\sin x \cos x)^۲}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot \cos^۲ x} = -۲ \lim_{x\to\pi/۴} (\sin x \cos x) = -۱$$

بنابراین $A = e^{-۱} = ۱/e$ است.

پاسخ مسأله ۶) ج) صورت و مخرج را به $(-۲)^n$ تقسیم می‌کنیم:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{(-۲)^n + ۳^n}{(-۲)^{n+۱} + ۳^{n+۱}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱ + (-\frac{۳}{۲})^n}{-۲ + ۳(-\frac{۳}{۲})^n}$$

چون $|\frac{-۳}{۲}| < ۱$، پس $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{۳}{۲}\right)^n = ۰$ و بنابراین $\ell = \frac{۱+۰}{-۲+۰} = \frac{-۱}{۲}$

پاسخ مسأله ۷) الف) فرض می‌کنیم $u = \ln(e^x + ۱)$ و $dV = \frac{dx}{e^x}$ پس $du = \frac{e^x dx}{e^x+۱}$ و $V = \int \frac{dx}{e^x} = -e^{-x}$. بنابراین:

$$\frac{\ln(e^x+۱)}{e^x}dx = \int \frac{\ln(e^x+۱)}{e^x}dx$$

$$= -e^{-x}(e^x+۱) - \int -e^{-x}\cdot \frac{e^x dx}{e^x+۱} = -\frac{\ln(e^x+۱)}{e^x} + \int \frac{dx}{e^x+۱}$$

اکنون با فرض $t = e^x + ۱$ داریم: $x = \ln|t-۱|$ و $dx = \frac{dt}{t-۱}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(e^x+۱)}{e^x}dx &= -\frac{\ln(e^x+۱)}{e^x} + \int \frac{dt}{t(t-۱)} \\
&= -\frac{\ln(e^x+۱)}{e^x} + \int \left\{\frac{-۱}{t} + \frac{۱}{t-۱}\right\} dt \\
&= -\frac{\ln(e^x+۱)}{e^x} - \ln|t| + \ln|t-۱| + C \\
&= -\frac{\ln(e^x+۱)}{e^x} - x + \ln|e^x+۱| + C
\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) ب) با فرض $t = \ln x$ داریم: $x = e^t$، $dx = e^t \cdot dt$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\int (\ln x)^۲ dx &= \int (\ln x)^۲ dx = \int t^۲ \cdot e^t \cdot dt \overset{(۱)}{=} \int t^۲ d(e^t) - \int ۲t\cdot e^t dt \\
&\overset{(۲)}{=} t^۲\cdot e^t - ۲\int t\cdot d(e^t) = t^۲ e^t - ۲\left\{te^t - \int ۱ e^t dt\right\} \\
&= t^۲ e^t - ۲te^t + ۲e^t + C = x(\ln x)^۲ - ۲x\ln x + ۲x + C
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از قاعدهٔ جزء به جزء با فرض $u=t^{۲}$ و $dv=e^{t}\cdot dt$ استفاده کرده‌ایم و در (۲) با فرض $u=t$ و $dv=e^{t}\cdot dt$.

پاسخ مسأله ۷) ج) اگر فرض شود $u=\sin x$، آنگاه $du=\cos x dx$ و $\begin{array}{c|cc} x & ۰ & \pi/۲ \\ \hline u & ۰ & ۱ \end{array}$.
بنابراین:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x dx}{۶-۵\sin x+\sin^{۲}x}=\int_{۰}^{۱}\frac{du}{۶-۵u+u^{۲}}=\int_{۰}^{۱}\frac{du}{(u-\frac{۵}{۲})^{۲}-(\frac{۱}{۲})^{۲}}$$
$$=\left[\frac{۱}{۲(\frac{۱}{۲})}\ln\left|\frac{(u-\frac{۵}{۲})-\frac{۱}{۲}}{(u-\frac{۵}{۲})+\frac{۱}{۲}}\right|\right]_{۰}^{۱}=\left[\ln\left|\frac{u-۳}{u-۲}\right|\right]_{۰}^{۱}=۲\ln ۲-\ln ۳$$

پاسخ مسأله ۸) به کمک فرمول:

$$\int_{۰}^{۱}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=۱}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{۱}{\sqrt{۴n^{۲}-۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۴n^{۲}-۲^{۲}}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۴n^{۲}-n^{۲}}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left\{\frac{۱}{\sqrt{۴-(\frac{۱}{n})^{۲}}}+\frac{۱}{\sqrt{۴-(\frac{۲}{n})^{۲}}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۴-(\frac{n}{n})^{۲}}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱-۰}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{۴-(k\frac{۱-۰}{n})^{۲}}}=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{۴-x^{۲}}}=\left[\arcsin(\frac{x}{۲})\right]_{۰}^{۱}=\frac{\pi}{۶}$$

پاسخ مسأله ۹) با توجه به اینکه $\frac{۱}{۱-x}=۱+x+\cdots+x^{n}+\cdots$، داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^{۲}}{۱-x^{۲}}=x^{۲}\frac{۱}{۱-x^{۲}} \\ &= x^{۲}\left(۱+x^{۲}+(x^{۲})^{۲}+\cdots+(x^{۲})^{n}+\cdots\right) \\ &= x^{۲}+x^{۴}+x^{۶}+\cdots+x^{۲n}+\cdots \end{aligned}$$

با فرض $y=x^{۲}$، می‌توان نوشت $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}y^{n}$ که ضریب جمله n ام آن $a_n=۱$ است.
پس اگر R شعاع همگرایی آن باشد، آنگاه:

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۱}=۱$$

و بنابراین $R = ۱$. پس اگر $|y| < ۱$ (یعنی، $x^۲ < ۱$ یا «$x < ۱$ و $-۱ < x$») آنگاه سری واگرا است و اگر $|y| = ۱$ (یعنی، $x^۲ > ۱$ یا $۱ < x < -۱$) آنگاه سری همگرا است و اگر $|y| > ۱$ (یعنی، $x^۲ = ۱$ یا $x = \pm ۱$) آنگاه سری به صورت $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱)$ تبدیل می‌شود که حد جملهٔ عمومی آن صفر نیست، بنابراین واگرا است. پس در مجموع، سری وقتی و تنها وقتی همگرا است که $۱ < x < -۱$. یعنی، ثابت شد که:

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} x^{۲n} \qquad\qquad (۰ < x < ۱)$$

پاسخ مسأله ۱۰) چون $۰ \leq x \leq ۲$، پس از $y^۲ = x$ نتیجه می‌گردد که $y = \sqrt{x}$ بنابراین حجم مورد نظر برابر است با:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^۲ dx = \pi \int_۰^۲ (\sqrt{x})^۲ dx = \pi \left[\frac{x^۲}{۲}\right]_۰^۲ = ۲\pi$$

امتحان یازدهم

(۱) هر یک از حدهای زیر را محاسبه نمائید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\sin x/(x-\sin x)}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right)-\arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)\right)$ ج) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan(\pi x/2a)}$

(۲) فرض کنید تابع f روی فاصلهٔ $[0,1]$ پیوسته و روی فاصلهٔ $(0,1)$ مشتق‌پذیر باشد، ثابت کنید عددی مانند $0<c<1$ وجود دارد به طوری که:

$$c^2 f'(c)+2cf(c)=f(1)$$

(۳) به ازای چه مقادیری از a تابع $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ax+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$ پیوسته است.

(۴) مطلوبست محاسبهٔ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{(t^2-x^2)}\,dt$.

(۵) هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید.

الف) $\int\frac{x^2-x+1}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,dx$ ب) $\int\sqrt{1+\sin(\frac{x}{4})}\,dx$ ج) $\int\cos(\ln x)\,dx$

(٦) مساحت بین منحنی‌های $y=\ln^2 x$ و $y=\ln x$ را بیابید.

(۷) اولاً، نشان دهید طول قوس منحنی

$$x=f''(t)\cos t+f'(t)\sin t,\quad y=-f''(t)\sin t+f'(t)\cos t$$

از $t=t_1$ تا $t=t_2$ برابر $[f(t)+f''(t)]$ می‌باشد.
ثانیاً، طول منحنی

$$x=e^t(\cos t+\sin t),\quad y=e^t(\cos t-\sin t)$$

را از $t=0$ تا $t=2$ محاسبه نمائید.

(۸) الف) به ازای چه مقادیری از $p>0$ سری $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\{n\ln n[\ln(\ln n)]\}^p}$ همگرا است؟

ب) شعاع و فاصلهٔ همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(\sin x)^n}{n^2}$ را بیابید و نیز سری را در نقاط انتهایی بررسی کنید.

(۹) تمام ریشه‌های چهارم عدد $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$ را بیابید.

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) الف) فرض کنیم $y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\sin x/(x-\sin x)}$ و $A = \lim_{x\to ۰} y$. بنابراین:

$$\ln A = \lim_{x\to ۰} \ln y = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x-\sin x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to ۰} \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{۱-\frac{\sin x}{x}}\right)$$

پس با فرض $u = \frac{\sin x}{x}$ داریم:

$$\ln A = \lim_{u\to ۱} \frac{\ln u}{۱-u} = \lim_{u\to ۱} \frac{\frac{۱}{u}}{-۱} = \lim_{u\to ۱} \frac{-۱}{u} = -۱$$

که به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ انجامیده است و از قاعدهٔ هوپیتال استفاده نموده‌ایم. بنابراین $A = e^{-۱} = ۱/e$.

پاسخ مسأله ۱) ب) با توجه به $\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{۱+ab}\right)$ داریم:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to\infty} x\left(\arctan\left(\frac{x+۱}{x+۲}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+۲}\right)\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} x\arctan\left(\frac{\frac{x+۱}{x+۲}-\frac{x}{x+۲}}{۱+\frac{x+۱}{x+۲}\times\frac{x}{x+۲}}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} x\arctan\left(\frac{(x+۱)(x+۲)-x(x+۲)}{(x+۲)^۲+x(x+۱)}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} x\arctan\left(\frac{x+۲}{۲x^۲+۳x+۴}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x+۲}{۲x^۲+۵x+۴}\right)}{\frac{۱}{x}} \end{aligned}$$

که به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌انجامد. پس به کمک قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{(۱)(۲x^۲+۵x+۴)-(۴x+۵)(x+۲)}{(۲x^۲+۵x+۴)^۲}\right) \div \left(۱+(\frac{x+۲}{۲x^۲+۵x+۴})^۲\right)}{\frac{-۱}{x^۲}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^۲(۲x^۲+۵x+۴-۴x^۲-۱۳x-۱۰)}{(۲x^۲+۵x+۴)^۲+(x+۲)^۲} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{۲x^۴+۸x^۳+۶x^۲}{۴x^۴+۲۰x^۳+۴۲x^۲+۴۴x+۲۰} \overset{(۱)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{۲x^۴}{۴x^۴} = \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

که در (۱) از هم ارزی در بی‌نهایت با توجه به این نکته که بزرگترین درجه صورت و مخرج برابر هستند استفاده نموده‌ایم.

پاسخ مسأله ۱) ج) فرض کنیم $y=\left[۲-\frac{x}{a}\right]^{\tan(\pi x/۲a)}$ و $A=\lim\limits_{x\to a} y$. در اینصورت:

$$\ln A=\lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a}\tan\left(\frac{\pi x}{۲a}\right)\ln\left(۲-\frac{x}{a}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(۲-\frac{x}{a}\right)}{\cot\left(\frac{\pi x}{۲a}\right)}$$

که به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌انجامد. پس به کمک قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\ln A=\lim_{x\to a}\frac{(\frac{-۱}{a})/(۲-\frac{x}{a})}{(\frac{-\pi}{۲a})/\sin^۲(\frac{\pi x}{۲a})}=\frac{۲}{\pi}\lim_{x\to a}\frac{\sin^۲(\frac{\pi x}{۲a})}{۲-\frac{x}{a}}=\frac{۲}{\pi}\times\frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۲})}{۲-۱}=\frac{۲}{\pi}$$

بنابراین $A=e^{۲/\pi}$.

پاسخ مسأله ۲) تابع $g(x)=x^۲f(x)$ را در نظر می‌گیریم. چون f بر $[۰,۱]$ پیوسته است، g نیز چنین است. چون f بر $(۰,۱)$ مشتق‌پذیر است، g نیز چنین است. پس بنا به قضیهٔ لاگرانژ، نقطه‌ای مانند $c\in(۰,۱)$ وجود دارد که: $g(۱)-g(۰)=g'(c)(۱-۰)$. اما $g(۱)=f(۱)$، $g(۰)=۰$ و $g'(c)=c^۲f'(c)+۲cf(c)$. بنابراین: $f(۱)-۰=c^۲f'(c)+۲cf(c)$ که تساوی مورد نظر ما می‌باشد.

پاسخ مسأله ۳) اگر $x_۰<۰$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx_۰}=۰$ و لذا:

$$f(x_۰)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax_۰+x^۲e^{nx_۰}}{۱+e^{nx_۰}}=\frac{ax_۰+۰}{۱+۰}=a\,x_۰$$

اگر $x_۰=۰$، آنگاه:

$$f(۰)=\lim_{n\to\infty}\frac{۰+۰\times e^{۰}}{۱+e^{۰}}=\frac{۰}{۲}=۰$$

اما اگر $x_۰>۰$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-nx_۰}=۰$ و با تقسیم صورت و مخرج بر $e^{nx_۰}$، داریم:

$$f(x_۰)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax_۰+x_۰^۲e^{nx_۰}}{۱+e^{nx_۰}}=\lim_{n\to\infty}\frac{ax_۰e^{-nx_۰}+x_۰^۲}{e^{-nx_۰}+۱}=\frac{ax_۰\times۰+x_۰^۲}{۰+۱}=x_۰^۲$$

و بنابراین در مجموع می‌توان نوشت

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & \text{اگر } x>۰\\ ۰ & \text{اگر } x=۰\\ ax & \text{اگر } x<۰\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که به‌ازای هر مقدار دلخواه از a، تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_۰\neq۰$ پیوسته است. بعلاوه، در $x_۰=۰$ نیز پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x\to۰^+}f(x)=\lim_{x\to۰^+}x^۲=۰=f(۰)\qquad\lim_{x\to۰^-}f(x)=\lim_{x\to۰^-}ax=۰=f(۰)$$

پاسخ مسأله ۴) چون $e^{-x^۲}$، نسبت به t ثابت است، می‌توان نوشت:

$$A = \lim_{x\to\infty} \int_۰^x e^{(t^۲-x^۲)} \cdot dt = \lim_{x\to\infty} e^{-x^۲} \int_۰^x e^{t^۲} dt = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_۰^x e^{t^۲}\, dx}{e^{x^۲}}$$

که به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ می‌انجامد است. پس به کمک قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^۲}}{۲x\, e^{x^۲}} = \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{۲x} = ۰$$

پاسخ مسأله ۵) الف) فرض کنیم $u = \sqrt{x-۲}$، پس $x = u^۲ + ۲$، $dx = ۲udu$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^۲ - x + ۱}{(x+۱)\sqrt{x-۲}} dx &= \int \frac{(u^۲+۲)^۲ - (u^۲+۲)+۱}{(u^۲+۲+۱)u}(۲u)du \\ &= ۲\int \frac{u^۴ + ۳u^۲ + ۳}{u^۲+۳} du = ۲\int \left(u^۲ + \frac{۳}{u^۳+۳}\right) du \\ &= ۲\frac{u^۳}{۳} + ۲\frac{\sqrt{۳}}{۳} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{۳}}\right) + C \\ &= \frac{۲}{۳}(x-۲)^{۳/۲} + ۲\sqrt{۳} \arctan\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\sqrt{x-۲}\right) + C\end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۵) ب) فرض کنیم $u = \sqrt{۱+\sin\left(\frac{x}{۴}\right)}$، پس $\sin\left(\frac{x}{۴}\right) = u^۲ - ۱$ و بنابراین $x = ۴\arcsin(u^۲-۱)$. پس $dx = \frac{۸udx}{\sqrt{۱-(u^۲-۱)^۲}}$ و

$$\begin{aligned}\int \sqrt{۱+\sin(\frac{x}{۴})} dx &= \int u \frac{۸udu}{\sqrt{۱-(u^۲-۱)^۲}} = ۸\int \frac{u^۲ du}{\sqrt{۲u^۲ - u^۴}} \\ &= ۸\int \frac{udu}{\sqrt{۲-u^۲}} \overset{(۱)}{=} -۸\sqrt{۲-u^۲} + C = -۸\sqrt{۱-\sin\left(\frac{x}{۴}\right)} + C\end{aligned}$$

که در (۱) از این نکته استفاده کرده‌ایم که $\left(\sqrt{۲-u^۲}\right)' = \frac{-u}{\sqrt{۲-u^۲}}$.

پاسخ مسأله ۵) ج) فرض کنیم $t = \ln x$، بنابراین: $x = e^t$، $dx = e^t dt$:

$$I = \int \cos(\ln x) dx = \int e^t \cdot \cos t \cdot dt$$

بافرض $u = e^t$ و $dv = \cos t \cdot dt$ داریم: $du = e^t \cdot dt$ و $v = \sin t$. بنابراین:

$$I = e^t \sin t - \int e^t \cdot \sin t \cdot dt$$

مجدداً با فرض $u = e^t$ و $dv = \sin t\, dt$ داریم: $du = e^t \cdot dt$ و $v = -\cos t$. بنابراین:

$$I = e^t \sin t - \left\{ -e^t \cos t + \int e^t \cdot \cos t \cdot dt \right\} = e^t \sin t + e^t \cos t - I$$

بنابراین:

$$I = \frac{۱}{۲}(e^t \cdot \sin t + e^t \cos t) + C = \frac{x}{۲}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$$

پاسخ مسأله ۶) ابتدا منحنی‌های داده شده را برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = \ln^۲ x \end{cases} \Rightarrow \ln x = \ln^۲ x \Rightarrow \begin{cases} \ln x = ۰ \\ \ln x = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = e \end{cases}$$

چون $۱ \leq x \leq e$، $۰ \leq \ln x \leq ۱$، پس $\ln^۲ x \leq \ln x$. بنابراین مساحت خواسته شده برابر است با:

$$A = \int_۱^e \left(\ln x - \ln^۲ x \right) dx$$

با فرض $u = \ln x$ داریم: $x = e^u$، $dx = e^u du$، $\begin{array}{c|cc} x & ۱ & e \\ \hline u & ۰ & ۱ \end{array}$ و بنابراین

$$\begin{aligned} A &= \int_۰^۱ (u - u^۲) e^u du \overset{(۱)}{=} \int_۰^۱ (u - u^۲) d(e^u) \\ &= \Big[(u - u^۲) e^u \Big]_۰^۱ - \int_۰^۱ (۱ - ۲u) e^u du \overset{(۲)}{=} ۰ - \int_۰^۱ (۱ - ۲u) d(e^u) \\ &= -\Big[(۱ - ۲u) e^u \Big]_۰^۱ + \int_۰^۱ -۲ e^u du = e + ۱ - ۲\, [e^u]_۰^۱ = ۳ - e \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ۷) اولاً) به کمک فرمول طول قوس منحنی‌های پارامتری، داریم:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^۲ + [y'(t)]^۲}\, dt = \int_{t_۱}^{t_۲} \Big\{ \Big[f'''(t) \cos t + f'(t) \cos t \Big]^۲$$

$$+ \Big[-f'''(t) \sin t - f'(t) \sin t \Big]^۲ \Big\}^{۱/۲} dt = \int_{t_۱}^{t_۲} \sqrt{\Big[f'''(t) + f'(t) \Big]^۲}\, dx$$

$$= \int_{t_۱}^{t_۲} \Big(f'''(t) + f'(t) \Big) dt = \Big[f''(t) + f(t) \Big]_{t_۱}^{t_۲}$$

پاسخ مسأله ۷) ثانیاً) مشابه قسمت قبل، داریم:

$$\ell = \int_۰^۲ \Big\{ \big[e^t (\cos t + \sin t) + e^t (-\sin t + \cos t) \big]^۲$$

$$\left[e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)\right]^{۲}\Big\}^{۱/۲} dt$$
$$= \int_{۰}^{۲} e^t\sqrt{(۲\cos t)^۲+(-۲\sin t)^۲}dt$$
$$= ۲\int_{۰}^{۲} e^t\cdot dt = ۲\left[e^t\right]_{۰}^{۲} = ۲(e^۲-۱)$$

پاسخ مسأله ۸) الف) از آزمون انتگرال استفاده می‌کنیم. اگر $f(x)$ تابع $\dfrac{۱}{\{x(\ln x)[\ln(\ln x)]\}^p}$ باشد ، آنگاه f بر $[۴,+\infty)$، مثبت است و بعلاوه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -p\Big[(\ln x)\cdot\ln(\ln x)+x\times\frac{۱}{x}\ln(\ln x) \\ &\qquad +x(\ln x)\frac{\frac{۱}{x}}{\ln x}\Big].\Big[x(\ln x)\cdot\ln(\ln x)\Big]^{p-۱} \\ &= -p\Big[(۱+\ln x)\cdot\ln(\ln x)+۱\Big]\Big[x\cdot(\ln x)\cdot\ln(\ln x)\Big]^{p-۱}\end{aligned}$$

که بر $[۴,+\infty)$، منفی می‌باشد و لذا f بر آن بازه نزولی می‌باشد. یعنی، شرایط استفاده از قضیه آزمون انتگرال فراهم است. بنابراین، شرط لازم و کافی برای همگرایی سری $\sum_{n=۴}^{\infty} f(n)$ عبارت از همگرایی انتگرال ناسرهٔ $\int_{۴}^{\infty} f(x)dx$ می‌باشد. با فرض $u=\ln(\ln x)$ ملاحظه می‌شود که $du=\dfrac{dx}{x\ln x}$ و $\begin{array}{c|cc} x & ۴ & a \\ \hline u & \ln(\ln ۴) & \ln(\ln a)\end{array}$. بنابراین

$$I_p=\int_{۴}^{\infty} f(x)dx=\lim_{a\to\infty}\int_{۴}^{a}\frac{dx}{x(\ln x)[\ln(\ln x)]^p}=\lim_{a\to\infty}\int_{\ln(\ln ۴)}^{\ln(\ln a)}\frac{du}{u^p}$$

اگر $p>۱$، آنگاه $p-۱>۰$ و لذا:

$$\begin{aligned} I_p &= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-۱}{(p-۱)u^{p-۱}}\right]_{\ln(\ln ۴)}^{\ln(\ln a)} \\ &= \frac{-۱}{p-۱}\lim_{a\to\infty}\left(\frac{۱}{\{\ln(\ln a)\}^{p-۱}}-\frac{۱}{\{\ln(\ln ۴)\}^{p-۱}}\right)=\frac{۱}{(p-۱)\{\ln(\ln ۴)\}^{p-۱}}\end{aligned}$$

اگر $p=۱$، آنگاه:

$$I_۱=\lim_{a\to\infty}\Big[\ln u\Big]_{\ln(\ln ۴)}^{\ln(\ln a)}=\lim_{a\to\infty}\Big\{\ln[\ln(\ln a)]-\ln[\ln(\ln ۴)]\Big\}$$

که به بی‌نهایت میل می‌کند. اگر $p<۱$، آنگاه $p-۱<۰$ است و لذا:

$$I_p=\lim_{a\to\infty}\left[\frac{u^{۱-p}}{۱-p}\right]_{\ln(\ln ۴)}^{\ln(\ln a)}=\frac{۱}{۱-p}\lim_{a\to\infty}\Big\{[\ln(\ln a)]^{۱-p}-[\ln(\ln ۴)]^{۱-p}\Big\}$$

که به بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین، وقتی و تنها وقتی دنبالهٔ داده شده همگرا است که $p>۱$ باشد.

پاسخ مسأله ۸) ب) با فرض $y=\sin x$، می‌توان نوشت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}y^n$ که یک سری توانی با ضریب جملهٔ عمومی $a_n=\frac{2^n}{n^2}$ است. پس اگر شعاع همگرایی آن

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=(1)^2\times 2=2$$

است. بنابراین $R=\frac{1}{2}$. بنابراین اگر $|y|<\frac{1}{2}$، آنگاه سری همگرا است. و اگر $|y|>\frac{1}{2}$، آنگاه سری واگرا می‌باشد. اما اگر $|y|=\frac{1}{2}$، آنگاه سری به $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ یا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ می‌رسد که هر دو سری مذکور همگرایند. (زیرا سری توانی با $p>1$ می‌باشند). پس سری وقتی و تنها وقتی همگرا است که: $\frac{-1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$. اما $y=\sin x$، پس سری اصلی وقتی و تنها وقتی همگرا است که $\frac{-1}{2}\leq\sin x\leq\frac{1}{2}$، یعنی $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leq x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{6}$. که k عددی صحیح است. یعنی، دامنهٔ همگرایی سری عبارتست از:

$$D=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\left[2n\pi-\frac{\pi}{6},2n\pi+\frac{\pi}{6}\right]$$

پاسخ مسأله ۹) اگر $w=1+i\sqrt{3}$ باشد، آنگاه $|w|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ و

$$\arg(w)=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ w=2e^{\pi i/3}$$

بعلاوه $2e^{-\pi i/3}=\overline{w}=1-i\sqrt{3}$. بنابراین:

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{w}{\overline{w}}\right)^4=\left(\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{-\pi i/3}}\right)^4=\left(e^{2\pi i/3}\right)^4=e^{8\pi i/3}=e^{2\pi i+2\pi i/3}\\ &= e^{2\pi i/3}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

امتحان دوازدهم

(۱) معادلهٔ $z^{۲}+(۲i-۳)z+۵-i=۰$ را حل کنید.

(۲) حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\dfrac{۱+\tan x}{۱+\sin x}\right)^{۱/\sin x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\ln(\cos x)}{\sqrt[۴]{۱+x^{۲}}-۱}$

(۳) فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته است و معادلهٔ $f(x)=۰$ در این فاصله تعداد متناهی ریشه دارد. آنها را بصورت $a<x_۱<x_۲<x_۳<\cdots<x_n<b$ مرتب می‌کنیم، ثابت کنید در هر یک از فاصله‌های $(a,x_۱),(x_۱,x_۲),(x_۲,x_۳),\cdots,(x_n,b)$ علامت تابع ثابت است.

(۴) با فرض $\int_{\arctan x}^{\ln y}\dfrac{e^t}{t}dt+x^y=۰$، مقدار $y'=\dfrac{dy}{dx}$ را بیابید.

(۵) اولاً صورت قضیه مقدار میانگین (برای مشتق) را بیان کرده و ثانیاً ثابت کنید که به ازای هر $x_۱<x_۲$ داریم $\arctan x_۲-\arctan x_۱\leq x_۲-x_۱$.

(۶) فقط به چهار مورد از پنج قسمت زیر، بدلخواه پاسخ دهید:

الف) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(۱+x^{۲})\ln(x+\sqrt{۱+x^{۲}})}}$ ب) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+۱)\sqrt{x^{۲}+۲x}}$

ج) $\displaystyle\int\frac{\sin^{۲}x\cdot dx}{e^x}$ د) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{۳}\cdot\sqrt[۵]{۱+\frac{۱}{x}}}$ هـ) $\displaystyle\int_{۱}^{e^{۳}}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[۳]{\ln^{۲}x}}$

(۷) حاصل حد زیر را محاسبه نمایید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^{۲}}\left\{e^{-۱/n}+۲e^{-۲/n}+۳e^{-۳/n}+\cdots+ne^{-n/n}\right\}$$

(۸) الف) در همگرایی و یا واگرایی $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{۲n-۱}\sin\left(\frac{۱}{\sqrt{n}}\right)$ تحقیق نمائید.

ب) با استفاده از آزمون انتگرال ثابت کنید:

$$\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}\arctan\frac{۱}{۲}<\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}+۴}<\frac{\pi}{۴}$$

حل مسایل

پاسخ مسأله ۱) برای حل مسأله واضح است که: $c=۵-i$ و $b=۲i-۳$ و $a=۱$
بنابراین:

$$\triangle \;=\; b^{۲}-۴ac=(۲i-۳)^{۲}-۴(۱)(۵-i)$$

$$= \quad -۴ - ۱۲i + ۹ - ۲۰ + ۴i = -۱۵ - ۸i$$

برای بدست آوردن $\sqrt{\triangle}$، از قبل می‌دانیم که اگر در عدد مختلط مفروض $z = x + iy$، x و y اعداد حقیقی باشند می‌توان نوشت:

$$(x+iy)^۲ = x^۲ - y^۲ + ۲xyi = -۱۵ - ۸i$$

بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^۲ - y^۲ = -۱۵ \\ xy = -۴ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^۲ - y^۲ = -۱۵ \\ y = -۴/x \end{array} \right. \qquad (۱)$$

که با جاگذاری y در رابطه (۱) داریم:

$$\begin{array}{l} x^۲ - \frac{۱۶}{x^۲} = -۱۵ \Rightarrow x^۴ + ۱۵x^۲ - ۱۶ = ۰ \\ (x^۲+۱۶)(x^۲-۱) = ۰ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x^۲ = -۱۶ & \text{غیر قابل قبول} \\ x^۲ = ۱ & \text{قابل قبول} \end{array} \right. \end{array}$$

توضیح اینکه چون x عدد حقیقی می‌باشد پس $x = \pm ۱$ ریشه‌های قابل قبول برای x هستند. واضح است که با جاگذاری مقدار x در رابطه $xy = -۴$ داریم: $(x = ۱, y = -۴)$ و $(x = -۱, y = ۴)$، پس دو ریشه برای $\sqrt{\triangle}$ بدست می‌آید که عبارتند از: $(۱ - ۴i)$ و $(-۱ + ۴i)$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{rcl} z &=& \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{۲a} = \frac{-(۲i-۳) \pm (۱-۴i)}{۲} = ۲ - ۳i \quad \text{یا} \quad ۱ + i \\ z &=& \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{۲a} = \frac{-(۲i-۳) \pm (-۱+۴i)}{۲} = ۱ + i \quad \text{یا} \quad ۲ - ۳i \end{array}$$

پاسخ مسأله ۲) الف) گیریم $y = \left(\frac{۱+\tan x}{۱+\sin x}\right)^{۱/\sin x}$ و $A = \lim_{x\to ۰} y$. در اینصورت:

$$\begin{array}{rcl} \ln A &=& \lim_{x\to۰} \ln y = \lim_{x\to۰} \frac{۱}{\sin x} \ln\left(\frac{۱+\tan x}{۱+\sin x}\right) \\ &=& \lim_{x\to۰} \frac{\ln(۱+\tan x) - \ln(۱+\sin x)}{\sin x} \end{array}$$

که به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌انجامد. پس به کمک قاعده هوپیتال داریم:

$$\ln A = \lim_{x\to۰} \frac{(\frac{۱/\cos^۲ x}{۱+\tan x}) - (\frac{\cos x}{۱+\sin x})}{\cos x} = \frac{۱-۱}{۱} = ۰$$

و بنابراین $A = e^۰ = ۱$.

پاسخ مسأله ۲) ب) به کمک هم‌ارزی‌های $\ln(1+x) \sim x$ و $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n}$ داریم:

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln[1+(\cos x - 1)]}{\frac{1}{4}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{1}{4}x^2}$$

و سپس به کمک هم‌ارزی $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ داریم:

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{-(1-\cos x)}{\frac{1}{4}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{2}x^2}{\frac{1}{4}x^2} = -2$$

پاسخ مسأله ۳) می‌دانیم که اگر تابع $y=f(x)$ بر فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند، آنگاه $y=f(x)$ در فاصلهٔ (a,b) حداقل یک ریشه دارد. بنا به فرض تابع f بر بازهٔ (x_i, x_{i+1}) هیچ ریشه‌ای ندارد. در حالی که اگر $x_i < \alpha < \beta < x_{i+1}$ و $f(\alpha)f(\beta) < 0$ آنگاه باید نقطه‌ای مانند $c \in (\alpha,\beta)$ وجود داشته باشد بطوریکه $f(c)=0$. این تناقض نشان می‌دهد که شرط وجود α و β غلط است، یعنی همواره $f(\alpha)f(\beta) \geq 0$ و تابع بر بازهٔ (x_i, x_{i+1}) تغییر علامت نمی‌دهد.

پاسخ مسأله ۴) اگر $f = \int_{\arctan x}^{\ln y} \frac{e^t}{t}dt$ و $g = x^y$ فرض کنیم می‌توان نوشت:

$$f' = \frac{y'}{y} \times \frac{e^{\ln y}}{\ln y} - \frac{1}{1+x^2} \times \frac{e^{\arctan x}}{\arctan x} \overset{(1)}{=} \frac{y'}{\ln y} - \frac{e^{\arctan x}}{(x^2+1)\arctan x}$$

چون $g = x^y$، $\ln g = y \ln x$ و بنابراین

$$\frac{g'}{g} = y'\ln x + \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; g' = x^y(y'\ln x + \frac{y}{x})$$

اما با توجه به صورت مسأله داریم $f+g=0$ بنابراین:

$$\frac{y'}{\ln y} - \frac{e^{\arctan x}}{(x^2+1)\arctan x} + x^y\left(y'\ln x + \frac{y}{x}\right) = 0$$

حال کافی است که از معادله بالا مقدار y' را بدست آوریم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$y' = \left(\frac{e^{\arctan x}}{(x^2+1)\arctan x} - yx^{y-1}\right) \div \left(\frac{1}{\ln y} + x^y \ln x\right)$$

یادآوری و تکمیل: در رابطه (۱) از فرمول، $N^{\log_N^x} = x$ استفاده نموده‌ایم. یادآوری می‌کنیم که رابطه مشابهی نیز بصورت: $b^{\log_a^N} = N^{\log_a^b}$ نیز با توجه به اینکه $\log_a^a = 1$، قابل استفاده می‌باشد.

پاسخ مسأله ۵) برای مشاهده صورت قضیه مقدار میانگین (یا لاگرانژ) به پاسخ مساله ۲ از امتحان دوم مراجعه شود.

تابع $f(x)=\arctan x$ را بر بازهٔ (x_1,x_2) در نظر می‌گیریم. چون $y=f(x)$ بر $[x_1,x_2]$ پیوسته و بر (x_1,x_2) مشتق‌پذیر است (زیرا، $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$)، بنا به قضیه مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند، $c\in(x_1,x_2)$ وجود دارد بطوریکه $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$. یعنی:

$$\arctan x_2-\arctan x_1=\frac{1}{1+c^2}(x_2-x_1) \qquad (*)$$

چون $c^2\geq 0$ می‌باشد، بنابراین $\frac{1}{1+c^2}\leq 1$ پس $(*)$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\arctan x_2-\arctan x_1\leq(x_2-x_1)$$

پاسخ مسأله ٦) الف) فرض کنیم $u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$، در اینصورت:

$$du=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

و بنابراین

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}=\int\frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$=2\sqrt{u}+C=2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}+C$$

پاسخ مسأله ٦) ب) فرض کنیم $\frac{1}{u}=x+1$، در اینصورت $dx=\frac{-du}{u^2}$ و:

$$\int\frac{\frac{-du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{(\frac{1}{u}-1)^2+2(\frac{1}{u}-1)}}=-\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$=-\arcsin u+C=-\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)+C$$

پاسخ مسأله ٦) ج) از روش جزء به جزء استفاده کرده و فرض می‌کنیم $u=\sin^2 x$ و $dv=\frac{dx}{e^x}$. بنابراین $du=2\sin x\cos x dx$ و $v=-e^{-x}$. پس، می‌توان نوشت

$$I=\int\frac{\sin^2 x}{e^x}dx=-e^{-x}\sin^2 x+\int 2e^{-x}\sin x\cos x dx$$

مجدداً فرض کنیم $u=\sin x\cos x$ و $dv=e^{-x}\cdot dx$. بنابراین $du=(1-2\sin^2 x)dx$، $v=-e^{-x}$ بنابراین:

$$I \;=\; -e^{-x}\sin^2 x+2\left(-e^{-x}\sin x\cos x+\int e^{-x}(1-2\sin^2 x)\cdot dx\right)$$

$$\begin{aligned} &= -e^{-x}\sin^2 x - 2e^{-x}\sin x\cos x + 2\int e^{-x}dx - 4\int e^{-x}\sin^2 x dx \\ &= -e^{-x}\times\frac{1-\cos 2x}{2} - e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x} - 4I \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{2}e^{-x}(\cos 2x - 1) - e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\right\} + C \\ &= \frac{1}{10e^x}(\cos(2x) - 2\sin(2x) - 5) + C \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ٦) د) انتگرال داده شده، یک دو جمله‌ای دیفرانسیل با $m=-3$، $n=-1$، $p=\frac{-1}{5}$ است. چون $\frac{m+1}{n}=2$ عددی صحیح است و مخرج p برابر ۵ می‌باشد فرض می‌کنیم $1+x^{-1}=t^5$. بنابراین $x=(t^5-1)^{-1}$، $dx=-5t^4(t^5-1)^{-2}$ و می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} &= \int x^{-3}\cdot\left(1+x^{-1}\right)^{-1/5}\cdot dx \\ &= \int\left[(t^5-1)^{-1}\right]^{-3}\left[1+((t^5-1)^{-1})^{-1}\right]^{-1/5}\left[-5(t^5-1)t^4\cdot dt\right] \\ &= -5\int(t^5-1)^3\cdot(t^5)^{-1/5}\cdot(t^5-1)\cdot t^4\cdot dt = -5\int t^3(t^5-1)^4 dt \\ &= -5\int t^3(t^{20}-4t^{15}+6t^{10}-4t^5+1)dt \\ &= -5\left(\frac{t^{24}}{24}-4\frac{t^{19}}{19}+6\frac{t^{14}}{14}-4\frac{t^9}{9}+\frac{t^4}{4}\right)+C \end{aligned}$$

که در آن $t=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$.

پاسخ مسأله ٦) هـ) انتگرال داده شده، یک انتگرال ناسره است، که مشکل آن در $x=1$ است. با فرض $u=\ln x$، داریم $du=\frac{dx}{x}$ و $\begin{array}{c|cc} x & 1+\varepsilon & e^3 \\ \hline u & \ln(1+\varepsilon) & 3 \end{array}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \int_1^{e^3}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x}} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{e^3}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{3}\frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{u^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1}\right]_{\ln(1+\varepsilon)}^{3} = 3\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{\ln(1+\varepsilon)}\right) = 3\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

پاسخ مسأله ٧) با توجه به $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ داریم

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-1/n}+2e^{-2/n}+\cdots+ne^{-n/n}}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\left(\frac{۱}{n}e^{-۱/n} + \frac{۲}{n}e^{-۲/n} + \cdots + \frac{n}{n}e^{-n/n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{۱-۰}{n}\sum_{k=۱}^{n}\left(۰ + k\frac{۱-۰}{n}\right)e^{-\left(۰+k\frac{۱-۰}{n}\right)} = \int_{۰}^{۱} xe^{-x}\,dx$$

حال با کمک قاعده جزء به جزء و فرض $u = x$ و $dv = e^{-x}dx$ داریم $du = dx$ و $v = -e^{-x}$.
بنابراین

$$\ell = \Big[-xe^{-x}\Big]_{۰}^{۱} - \int_{۰}^{۱} -e^{-x}dx = -e^{-۱} + \Big[-e^{-x}\Big]_{۰}^{۱} = ۱ - ۲e^{-۱}$$

پاسخ مسأله ۸) الف) اگر $n \geq ۱$، آنگاه $۱ \geq \frac{۱}{\sqrt{n}} \geq ۰$ و لذا $\sin\left(\frac{۱}{\sqrt{n}}\right) \geq ۰$ بنابراین سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{۲n-۱}\sin\left(\frac{۱}{\sqrt{n}}\right)$ یک سری نوسانی است. بنا به آزمون لایبنیتز، شرط لازم و کافی برای همگرایی این سری آن است که دنبالهٔ $a_n = \frac{۱}{۲n-۱}\sin\left(\frac{۱}{\sqrt{n}}\right)$ نزولی و همگرا به صفر باشد. چون $۱ \geq \sin\left(\frac{۱}{\sqrt{n}}\right) \geq ۰$، پس $۰ \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲n-۱} = ۰$ و بنابراین a_n به صفر همگرا است.

برای تحقیق نزولی بودن دنبالهٔ a_n، تابع $f(x) = \frac{۱}{۲x-۱}\sin\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)$ را در نظر می‌گیریم. در اینصورت مشتق آن عبارتست از:

$$f'(x) = \frac{-\frac{۱}{۲x\sqrt{x}}\cos\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)(۲x-۱) - ۲\sin\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)}{(۲x-۱)^{۲}}$$

اما اگر $x \geq ۱$، آنگاه $\sin\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right) \geq ۰$، $\cos\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right) \geq ۰$، $۲x - ۱ > ۰$ و $x\sqrt{x} > ۰$ بنابراین $f'(x) < ۰$ بر فاصله $[۱, \infty)$ می‌باشد و لذا f بر $[۱, \infty)$ نزولی است. بنابراین

$$a_{n+۱} = f(n+۱) < f(n) = a_n$$

یعنی دنبالهٔ a_n نزولی است. پس بنا به آزمون لایبنیتز، سری داده شده همگرا می‌باشد.

پاسخ مسأله ۸) ب) اگر $y = f(x)$ بر $[۱, \infty)$ نزولی و مثبت باشد، آنگاه:

$$\int_{۱}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=۱}^{\infty} f(x) \leq \int_{۰}^{\infty} f(x)dx \qquad (*)$$

چون در این حالت $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ پس:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^a$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{a}{2}\right) - 0\right] = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_1^a$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

با جاگذاری مقادیر بالا در رابطهٔ $(*)$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4} < \frac{\pi}{4}$$

که این رابطه، همان رابطه مورد نظر است.

امتحان سیزدهم

(۱) عدد مختلط $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ را به صورت $\alpha + i\beta$ بنویسید.

(۲) مطلوبست محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\csc x}$.

(۳) a را چنان بیابید که تساوی $\frac{2}{\pi^2} = \lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{1+\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)}$ برقرار باشد.

(۴) هرگاه $\arcsin\left(\frac{y}{x}\right) + x^y = \ln\left(x^2+y^2\right)$ باشد، آنگاه $\frac{dy}{dx}$ را بدست آورید.

(۵) اگر $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین نشان دهید:

$$(a-b)\tan b < \ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right) < (a-b)\tan a$$

(۶) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

الف) $\int x^5\sqrt{1-x^3}dx$ ب) $\int \frac{dx}{\sin x\left(\sin^2 x + 4\cos x - 5\right)}$

ج) $\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}dx$

(۷) در همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_1^e \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x}}$ بحث کنید.

(۸) طول قوس منحنی $y = e^x$ را از $x = \ln(\sqrt{3})$ تا $x = \ln(2\sqrt{2})$ بدست آورید.

(۹) از دو سئوال زیر تنها به یک سئوال پاسخ دهید

الف) همگرایی یا واگرایی دنبالهٔ $x_n = \frac{n^n}{n!}$ را بررسی نمائید.

ب) در همگرایی یا واگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ بحث کنید.

پاسخ مسایل

پاسخ مسالهٔ ۱) برای تعیین شکل قطبی $z = 1+\sqrt{3}i$ مدول و آرگومان آنرا بصورت زیر تعیین می‌نمائیم

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \theta = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z = 1+\sqrt{3}i = 2e^{(\pi i)/3}$$

اما با توجه به تعریف مزدوج عدد مختلط می‌توان نوشت

$$1-\sqrt{3}i = \bar{z} = \overline{2e^{(\pi i)/3}} = 2e^{-(\pi i)/3}$$

و بالاخره می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} &= \left(\frac{2e^{(\pi i)/3}}{2e^{-(\pi i)/3}}\right)^{10} = \left(e^{(2\pi i)/3}\right)^{10} \overset{(1)}{=} e^{(20\pi i)/3}\\ &= e^{6\pi i+(2\pi i)/3} = \left(e^{2\pi i}\right)^{3} \times e^{(2\pi i)/3}\\ &\overset{(2)}{=} (1)\times\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

که در اینجا $\alpha = \frac{-1}{2}$ و $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌باشد. توضیح اینکه در (۱) از رابطهٔ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ استفاده نموده‌ایم و در (۲) می‌دانیم که

$$\left(e^{2\pi i}\right)^{3} = [\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)]^3 = [1+0]^3 = 1$$

پاسخ مسالهٔ ۲) با توجه به رابطهٔ مثلثاتی $\csc x = 1/\sin x$ مشاهده می‌شود که حد به حالت ابهام 1^∞ می‌انجامد با فرض $y = (1+\sin x)^{\csc x}$ و $A = \lim\limits_{x\to 0} y$، داریم

$$\begin{aligned}\ln A &= \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln(1+\sin x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\\ &\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{\frac{\cos x}{1}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

بنابراین $\ln A = 1$ یا $A = e^1 = e$.

پاسخ مسالهٔ ۳) از محاسبهٔ حد طرف چپ تساوی و سپس مساوی قرار دادن با طرف راست $2/\pi^2$ مقدار a محاسبه می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{1+\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)} &\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to a}\frac{2(x-a)}{-\left(\frac{\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)}\\ &\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to a}\frac{2}{-\left(\frac{\pi}{a}\right)\left(\frac{\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)} = \frac{2}{\left(\frac{-\pi^2}{a^2}\right)\times\cos\pi} = \frac{2}{\frac{\pi^2}{a^2}} = \frac{2a^2}{\pi^2}\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن طرف چپ و راست می‌توان نوشت

$$\frac{2}{\pi^2}\times a^2 = \frac{2}{\pi^2}\times 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

پاسخ مسالهٔ ۴) فرض می‌کنیم $F(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) + x^y - \ln(x^2+y^2) = 0$. بنابراین با استفاده از فرمول مشتق ضمنی می‌توان نوشت

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\frac{\left(-\frac{y}{x^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} + y(1)x^{y-1} - \frac{2x}{x^2+y^2}}{\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} + (1)x^y\ln x - \frac{2y}{x^2+y^2}}$$

با توجه به اینکه $\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}$. با ضرب صورت و مخرج کسر در عبارت $\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}{x}$ می‌توان عبارت فوق را بصورت ساده‌تر زیر بازنویسی نمود

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(-\frac{y}{x^2})(x^2+y^2)+(x^2+y^2)(\sqrt{x^2-y^2})yx^{y-2}-2\sqrt{x^2-y^2}}{(\frac{1}{x})(x^2+y^2)+(x^2+y^2)(\sqrt{x^2-y^2})x^{y-1}\ln x-2(\frac{y}{x})\sqrt{x^2-y^2}}$$

⋆ توجه به این نکته که در صورت کسر، مشتق‌گیری نسبت به پارامتر x و در مخرج کسر مشتق‌گیری نسبت به پارامتر y می‌باشد بسیار مهم است.

پاسخ مسالهٔ ۵) تابع $F(x)=\ln(\cos x)$ را بر بازهٔ $0<a<b<\frac{\pi}{2}$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت F بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر (با مشتق $F'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$) می‌باشد. پس بنابه قضیه لاگرانژ نقطه‌ای مانند $x_0\in[a,b]$ وجود دارد بطوریکه $F(b)-F(a)=F'(x_0)\,(b-a)$. یعنی

$$\ln(\cos b)-\ln(\cos a)=-\tan x_0\,(b-a)=(a-b)\tan x_0 \qquad (۱)$$

اما تابع $y=\tan x$ بر بازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً صعودی است. پس چون $0<a<x_0<b<\frac{\pi}{2}$ است داریم

$$\tan a<\tan x_0<\tan b \qquad (۲)$$

بنابراین از (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$(a-b)\tan b<\ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right)<(a-b)\tan a$$

توجه داشته باشید که $\ln x-\ln y=\ln\left(\frac{x}{y}\right)$ می‌باشد.

پاسخ مسالهٔ ۶) از روش دو جمله‌ای دیفرانسیلی استفاده می‌کنیم. با مقایسه انتگرال داده شده با انتگرال $\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$ داریم $m=5$ و $n=3$ و $p=\frac{1}{2}$. از طرفی چون $\frac{m+1}{n}=\frac{5+1}{3}=2$ است، می‌توانیم فرض کنیم که $ax^n+b=t^k$، که $(k=2)$ مخرج p می‌باشد. یعنی $1-x^3=t^2$ پس

$$x^3=1-t^2\Rightarrow x=\left(1-t^2\right)^{1/3}\Rightarrow dx=\frac{-2}{3}t\left(1-t^2\right)^{-2/3}dt$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}I&=\int x^5\left(1-x^3\right)^{1/2}dx=\int\left(1-t^2\right)^{5/3}\times t\times\frac{-2t}{3}\left(1-t^2\right)^{-2/3}dt\\&=\frac{-2}{3}\int t^2\left(1-t^2\right)dt=\frac{-2}{3}\int t^2dt+\frac{2}{3}\int t^4dt=\frac{-2}{9}t^3+\frac{2}{15}t^5+C\end{aligned}$$

اما می‌دانیم $t = \sqrt{۱ - x^۳} = \left(۱ - x^۳\right)^{۱/۲}$. که با جاگذاری در رابطه بالا داریم

$$\begin{aligned} I &= \frac{-۲}{۹}\left(۱ - x^۳\right)^{۳/۲} + \frac{۲}{۱۵}\left(۱ - x^۳\right)^{۵/۲} + C \\ &= \frac{-۲}{۹}\sqrt{\left(۱ - x^۳\right)^۳} + \frac{۲}{۱۵}\sqrt{\left(۱ - x^۳\right)^۵} + C \end{aligned}$$

حل ب) در انتگرال گیری از توابع گویای $p(\sin x, \cos x)$ چنانچه رابطهٔ تقارنی بصورت $p(-\sin x, \cos x) = -p(\sin x, \cos x)$ وجود داشته باشد از تغییر متغیر $u = \cos x$ استفاده می‌کنیم و چنانچه رابطهٔ تقارنی بصورت $p(\sin x, -\cos x) = -p(\sin x, \cos x)$ وجود داشته باشد می‌بایست از تغییر متغیر $u = \sin x$ استفاده نمائید و چنانچه رابطهٔ تقارنی بصورت

$$p(-\sin x, -\cos x) = p(\sin x, \cos x)$$

برقرار باشد بهتر است از تغییر متغیر $u = \tan x$ و یا $u = \cot x$ استفاده شود.
در مسأله فوق واضح است که

$$p(-\sin x, \cos x) = \frac{۱}{-\sin x\left(\sin^۲ x + ۴\cos x - ۵\right)} = -p(\sin x, \cos x)$$

بنابراین با استفاده از تغییر متغیر $u = \cos x$ داریم

$$du = -\sin x dx, \quad \sin^۲ x = ۱ - u^۲$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin x\left(\sin^۲ x + ۴\cos x - ۵\right)} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^۲ x\left(\sin^۲ x + ۴\cos x - ۵\right)} \\ &= \int \frac{du}{\left(۱ - u^۲\right)\left(u^۲ - ۴u + ۴\right)} = \int \frac{du}{\left(۱ - u^۲\right)(u - ۲)^۲} \\ &\overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۲}\int \frac{du}{۱ - u} + \frac{۱}{۱۸}\int \frac{du}{۱ + u} + \frac{۴}{۹}\int \frac{du}{u - ۲} - \frac{۱}{۳}\int \frac{du}{(u - ۲)^۲} \\ &= \frac{-۱}{۲}\ln|۱ - u| + \frac{۱}{۱۸}\ln|۱ + u| + \frac{۴}{۹}\ln|u - ۲| + \frac{۱}{۳(u - ۲)} + C \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) کسر را به طریقهٔ زیر تفکیک نموده‌ایم

$$\frac{۱}{\left(۱ - u^۲\right)(u - ۲)^۲} = \frac{A}{۱ - u} + \frac{B}{۱ + u} + \frac{C}{u - ۲} + \frac{D}{(u - ۲)^۲}$$

$$\begin{aligned} &A(۱ + u)(u - ۲)^۲ + B(۱ - u)(u - ۲)^۲ \\ &\qquad + C\left(۱ - u^۲\right)(u - ۲) + D\left(۱ - u^۲\right) = ۱ \end{aligned}$$

در این صورت برای محاسبهٔ ضرایب، به u مقدار می‌دهیم

$$\begin{array}{lll} u=-۱ & \Rightarrow\ ۱۸B=۱ & \Rightarrow\ B=۱/۱۸ \\ u=۱ & \Rightarrow\ ۲A=۱ & \Rightarrow\ A=۱/۲ \\ u=۲ & \Rightarrow\ -۳D=۱ & \Rightarrow\ D=-۱/۳ \\ u=۰ & \Rightarrow\ ۴A+۴B-۲C+D=۱ & \Rightarrow\ C=۴/۹ \end{array}$$

که سه تای اول ریشه‌های مخرجند و آخری مقداری دلخواه می‌باشد.

حل ج) برای حل ابتدا فرض می‌کنیم $\sqrt{x}=t$ بنابراین $x=t^۲$، $dx=۲tdt$ و $\begin{array}{c|cc} x & ۰ & \pi^۲/۴ \\ \hline t=\sqrt{x} & ۰ & \pi/۲ \end{array}$. در نتیجه، می‌توانیم بنویسیم

$$I=\int_۰^{\pi^۲/۴}\sin\sqrt{x}\,dx=\int_۰^{\pi/۲}(\sin t).(۲tdt)=۲\int_۰^{\pi/۲} t\sin t\,dt$$

برای حل انتگرال فوق از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم با فرض $u=t$ و $dv=\sin t\,dt$، داریم $du=dt$، $v=-\cos t$ و

$$\begin{aligned} I &= ۲\left[-t\cos t+\int\cos t\cdot dt\right]_۰^{\pi/۲}=۲\left[-t\cos t+\sin t\right]_۰^{\pi/۲} \\ &= ۲\left[\frac{-\pi}{۲}\cos\left(\frac{\pi}{۲}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right)-۰\right]=۲[۰+۱]=۲ \end{aligned}$$

پاسخ مسالهٔ ۷) برای حل می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \int_۱^e\frac{dx}{x\cdot\sqrt[۳]{\ln x}} &= \lim_{\varepsilon\to۰+}\int_{۱+\varepsilon}^e\frac{dx}{x\,(\ln x)^{۱/۳}}\overset{(۱)}{=}\lim_{\varepsilon\to۰+}\int_{\ln(۱+\varepsilon)}^۱\frac{e^u\cdot du}{e^u\cdot u^{۱/۳}} \\ &= \lim_{\varepsilon\to۰+}\int_{\ln(۱+\varepsilon)}^۱ u^{-۱/۳}\cdot du=\lim_{\varepsilon\to۰+}\left[\frac{۳}{۲}u^{۲/۳}\right]_{\ln(۱+\varepsilon)}^۱ \\ &= \lim_{\varepsilon\to۰+}\left(\frac{۳}{۲}-\ln(۱+\varepsilon)\right)\overset{(۲)}{=}\frac{۳}{۲} \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) فرض شده است $u=\ln n$، پس $x=e^u$، $dx=e^udu$ و $\begin{array}{c|cc} x & ۱+\varepsilon & e \\ \hline u & \ln(۱+\varepsilon) & ۱ \end{array}$. در (۲) از این نکته استفاده شده است که $y=\ln x$ در $x=۱$ پیوسته است.

پاسخ مسالهٔ ۸) برای محاسبه طول قوس منحنی داده شده از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\ell=\int_a^b\sqrt{۱+y'^۲}\cdot dx=\int_{\ln(\sqrt{۳})}^{\ln(۲\sqrt{۲})}\sqrt{۱+e^{۲x}}\cdot dx$$

برای حل انتگرال فوق فرض می‌کنیم $e^{۲x} + ۱ = u^۲$. در نتیجه $e^{۲x} = u^۲ - ۱$ یا $x = \frac{۱}{۲}\ln(u^۲ - ۱)$. بنابراین $dx = \frac{u\,du}{u^۲ - ۱}$. از طرفی $\begin{array}{c|cc} x & \ln\sqrt{۳} & \ln(۲\sqrt{۲}) \\ \hline u & ۲ & ۳ \end{array}$ و

$$\ell = \int_۲^۳ \frac{u^۲ du}{u^۲ - ۱} \overset{(۱)}{=} \int_۲^۳ du + \int_۲^۳ \frac{du}{u^۲ - ۱} = \left[u - \frac{۱}{۲}\left|\frac{u+۱}{u-۱}\right|\right]_۲^۳ = ۱ - \frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{۳}{۲}\right)$$

در (۱) با اضافه و کم کردن عدد یک مخرج را در صورت تولید و تفکیک نموده‌ایم.

پاسخ مسالهٔ ۹) الف) برای حل از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم. چون $x_n = \frac{n^n}{n!}$ است، بنابراین

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+۱}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+۱)^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+۱)^{n+۱}}{n^n\,(n+۱)!} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+۱)^{n+۱}}{n^n\,(n+۱)\,n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n = e \end{aligned}$$

که چون $\ell = e \approx ۲/۷۱۷۸ > ۱$ می‌باشد بنابراین این سری داده شده واگرا می‌باشد.

پاسخ مسالهٔ ۹) ب) با فرض $y = x + ۱$ به یک سری توان با ضریب جملهٔ n ام $a_n = \frac{۱}{n}(۳^n + (-۲)^n)$ می‌رسیم: $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n y^n$. در این صورت شعاع همگرایی سری بر حسب y برابر $R = \frac{۱}{۳}$ است، زیرا

$$\begin{aligned} \frac{۱}{R} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{۳^{n+۱} + (-۲)^{n+۱}}{۳^n + (-۲)^n}\,\frac{n}{n+۱} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+۱} \times \lim_{n\to\infty}\frac{۱ + \left(\frac{-۲}{۳}\right)^{n+۱}}{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{-۲}{۳}\right)^n} = ۱ \times \frac{۱+۰}{\frac{۱}{۳}+۰} = ۳ \end{aligned}$$

بنابراین، اگر $|y| < \frac{۱}{۳}$، آنگاه سری همگرا است و اگر $|y| > \frac{۱}{۳}$، آنگاه سری واگرا است. اما باید حالت $|y| = \frac{۱}{۳}$ و یا بطور معادل $y = \pm\frac{۱}{۳}$ را نیز بررسی کنیم.

اگر $y = \frac{۱}{۳}$، آنگاه سری واگرا است، زیرا

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۳^n + (-۲)^n}{n}\left(\frac{۱}{۳}\right)^n = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\left(۱ + \left(\frac{-۲}{۳}\right)^n\right) \geq \frac{۱}{۳}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$$

که سری آخری (یعنی، سری هارمونیک $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$) واگرا می‌باشد.

اگر $y=-\frac{۱}{۳}$، آنگاه سری همگرا است، زیرا اولاً با یک سری نوسانی مواجه هستیم، و در ثانی قدر مطلق جملهٔ n ام آن برابر است با $a_n=\frac{۱}{n}\left(۱+(\frac{-۲}{۳})^n\right)$ که دنباله‌ای همگرا به صفر می‌باشد، زیرا

$$\circ \leq \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(۱+\left(\frac{-۲}{۳}\right)^n\right)\leq \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=\circ$$

برای اتمام کار باید ثابت شود که دنبالهٔ a_n نزولی است؛ یعنی به ازای هر n ای $a_{n+۱}\leq a_n$ و یا به بیان معادل

$$\frac{۱}{n+۱}\left(۱+\left(\frac{-۲}{۳}\right)^{n+۱}\right)\leq\frac{۱}{n}\left(۱+\left(\frac{-۲}{۳}\right)^n\right)$$
$$n\left(\frac{-۲}{۳}\right)^{n+۱}\leq ۱+(n+۱)\left(\frac{-۲}{۳}\right)^n$$

در نتیجه

$$\circ\leq ۱+\left(\frac{۵}{۳}n+۱\right).\left(\frac{-۲}{۳}\right)^n \qquad (۱)$$

اگر n زوج باشد، (۱) بدیهی است. چنانچه n فرد باشد، (۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت: $۳\leq \left(۵n+۳\right).\left(\frac{-۲}{۳}\right)^n$ که این نامعادله به کمک استقراء برای تمام $n\geq ۳$ ها برقرار می‌باشد. لذا دنباله a_n نزولی و همگرا به صفر است. در نتیجه، بنابه آزمون لایبنیتز به ازاء $y=-\frac{۱}{۳}$ همگرا می‌باشد.

بنابراین، سری وقتی و تنها وقتی همگرا است که $-\frac{۱}{۳}\leq y<\frac{۱}{۳}$. به بیان معادل، $-\frac{۱}{۳}\leq x+۱<\frac{۱}{۳}$، یا $-\frac{۴}{۳}\leq x<-\frac{۲}{۳}$.

امتحان چهاردهم

(۱) هر یک از حدود زیر را محاسبه نمائید

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\cot x}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

(۲) نوع پیوستگی تابع زیر را در نقطهٔ $x=0$ بیابید

$$F(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\cos\frac{1}{x} & ; \quad x>0\\ x[\frac{1}{x}] & ; \quad x<0\\ \frac{x-1}{1-2\cos x} & ; \quad x=0\end{cases}$$

(۳) $\frac{dy}{dx}$ را در صورتی بدست آورید که $\cos(xy)+x^2y=y$.

(۴) در صورتی که $z=x+yi$ عددی مختلط باشد، معادلهٔ $z^3+z^2+z+1=0$ را پاسخ کنید.

(۵) مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y=x$ و $y=\frac{x^2}{2}$ را در فاصلهٔ $[-1,2]$ بیابید.

(۶) هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید

الف) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.dx$ ب) $\displaystyle\int e^x.\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.dx$ ج) $\displaystyle\int\cos^{3/2}x.\sin^5x.dx$

(۷) در همگرایی یا واگرائی سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{n^3+1}}$ بحث کنید.

(۸) فرض کنید $k\in\mathbf{N}$ و

$$F_k(x)=\begin{cases}x^{2k}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

در این صورت نشان دهید $F_k(x)$ در $x=0$ دارای مشتق مرتبه $(k-1)$ ام است ولی مشتق k ام ندارد.

پاسخ مسایل

پاسخ مسالهٔ ۱) الف) فرض می‌کنیم $y=(\frac{\sin x}{x})^{\cot x}$ و $A=\lim\limits_{x\to 0}y$ در اینصورت می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\ln A &= \lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\cot x\times\ln(\frac{\sin x}{x})=\lim_{x\to 0}\cos x\times\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{\sin x}\\ &= \frac{0}{0}\overset{\text{هـ}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\\ &\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{2}}{x}=\frac{-1}{2}\lim_{x\to 0}x=\frac{-1}{2}\times 0=0\end{aligned}$$

بنابراین $\ln A = \circ$ یا $A = e^{\circ} = ۱$، که در (۱) از هم ارزی $\sin x \sim x$ استفاده نموده و سپس صورت و مخرج را بر x تقسیم نموده‌ایم. و در (۲) از هم ارزی $۱ - \cos x \sim \frac{x^۲}{۲}$ استفاده نموده‌ایم.

پاسخ مسالهٔ ۱) ب) ابتدا صورت مسأله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\lim_{x\to\circ^+} \sqrt[x]{\cos(\sqrt{x})} = \lim_{x\to\circ^+} (\cos(\sqrt{x}))^{۱/x} = ۱^{\infty}$$

مشاهده می‌شود که حد فوق به حالت مبهم ۱^{∞} می‌انجامد پس با فرض $y = (\cos(\sqrt{x}))^{۱/x}$ و $A = \lim_{x\to\circ^+} y$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\ln A &= \lim_{x\to\circ^+} \ln y = \lim_{x\to\circ^+} \frac{۱}{x} \times \ln(\cos\sqrt{x}) = \infty \times \circ = \lim_{x\to\circ^+} \frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} \\
&= \frac{\circ}{\circ} \overset{هـ}{=} \lim_{x\to\circ^+} \frac{\frac{(\cos\sqrt{x})}{\cos\sqrt{x}}}{۱} = \lim_{x\to\circ^+} \frac{\frac{-۱}{۲\sqrt{x}} \times \sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to\circ^+} \frac{-\sin\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}.\cos\sqrt{x}} \\
&\overset{(۱)}{=} \lim_{x\to\circ^+} \frac{-\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}.\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to\circ^+} \frac{-۱}{۲\cos\sqrt{x}} = \frac{-۱}{۲}
\end{aligned}$$

بنابراین $\ln A = \frac{-۱}{۲}$ یا $\frac{۱}{\sqrt{e}} = e^{-۱/۲}$، که در (۱) از هم ارزی $\sin x \sim x$ استفاده نموده‌ایم.

پاسخ مسالهٔ ۲) می‌دانیم که شرط پیوستگی تابع در نقطه $x = \circ$ این است که حد چپ و حد راست با مقدار تابع در نقطه $x = \circ$ برابر باشد. بنابراین ۳ حالت زیر را بررسی می‌کنیم

$$f(\circ) = \lim_{x\to\circ} \frac{x-۱}{۱-۲\cos x} = \frac{\circ-۱}{۱-۲(۱)} = \frac{-۱}{-۱} = ۱$$

$$\lim_{x\to\circ^+} f(x) = \lim_{x\to\circ^+} \sqrt{x}.\cos\frac{۱}{x} \overset{(\star_۱)}{=} \circ$$

توضیح اینکه در $(\star_۱)$ می‌دانیم تابع $-۱ \le \cos\frac{۱}{x} \le ۱$ یک تابع کرانه‌ای است از طرفی حاصلضرب یک تابع بی نهایت کوچک در یک تابع کراندار نیز یک بی نهایت کوچک بوده بنابراین حد فوق مساوی صفر می‌باشد. از طرفی

$$\lim_{x\to\circ^-} f(x) = \lim_{x\to\circ^-} x\left[\frac{۱}{x}\right]$$

می‌دانیم به ازای هر $x \neq \circ$ داریم $\frac{۱}{x} \le \left[\frac{۱}{x}\right] < ۱ + \frac{۱}{x}$. با ضرب طرفین در $x < \circ$ داریم $۱ + x < x\left[\frac{۱}{x}\right] \le ۱$ و در نتیجه

$$۱ = \lim_{x\to\circ^-} (۱+x) \le \lim_{x\to\circ^-} x\left[\frac{۱}{x}\right] \le \lim_{x\to\circ^-} (۱) = ۱ \qquad (\star_۲)$$

توضیح اینکه در رابطه $(\star_۲)$ بنابه قضیه ساندویچ چون حد طرف چپ و راست همگرا به عدد یک می‌باشد بنابرین حد عبارت وسط نیز برابر (۱) در نظر گرفته می‌شود.

پاسخ مسالهٔ ۳) فرض می‌کنیم $F(x,y)=\cos(xy)+x^{2}y-y=0$. بنابراین، با استفاده از فرمول مشتق ضمنی می‌توان نوشت

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{(-y)\sin(xy)+2xy}{(-x)\sin(xy)+x^{2}-1}=-\frac{y\sin(xy)+2xy}{x\sin(xy)+x^{2}-1}$$

پاسخ مسالهٔ ۴) برای حل معادلهٔ $z^{3}+z^{2}+z+1=0$ آنرا بصورت زیر تجزیه می‌نمائیم

$$z^{3}+z^{2}+z+1=z^{2}(z+1)+(z+1)=(z+1)(z^{2}+1)$$
$$\Rightarrow\begin{cases} z+1=0\\ z^{2}+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} z=-1\\ z=\pm i\end{cases}$$

پاسخ مسالهٔ ۵) ابتدا خط و سهمی داده شده را قطع می‌دهیم

$$\begin{cases} y=x\\ y=x^{2}/2\end{cases}\Rightarrow\frac{x^{2}}{2}-x=0\Rightarrow\begin{cases} x=0\\ x=2\end{cases}$$

سپس با توجه به اینکه رأس سهمی در $x=0$ می‌باشد شکل ناحیه مورد نظر را ترسیم می‌کنیم. با توجه به اینکه بدیهی است که خط و سهمی داده شده در فاصلهٔ $[-1,2]$ پیوسته‌اند پس مسأله‌ها عبارتست از محاسبهٔ مساحت بین $y=2x-x^{2}$ و $y=-x$ از $x=0$ تا $x=2$ بنابراین

$$S=\int_{0}^{2}(x-\frac{x^{2}}{2})dx=\left[\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{6}\right]_{0}^{2}=2-\frac{8}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

پاسخ مسالهٔ ٦)الف) برای حل می‌توان نوشت

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{1/3}}=\int_{0}^{1}x^{-1/3}.dx=\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{2}{3}}\right]_{0}^{1}+C=\frac{3}{2}\left[x^{2/3}\right]_{0}^{1}=\frac{3}{2}$$

پاسخ مسالهٔ ٦) ب)

$$\begin{aligned} I &= \int e^{x}.\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.dx=\int e^{x}.\frac{1+2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{2\cos^{2}(\frac{x}{2})}dx\\ &= \int\frac{e^{x}}{2\cos^{2}(\frac{x}{2})}.dx+\int\frac{2e^{x}\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{2\cos^{2}(\frac{x}{2})}.dx\\ &= \frac{1}{2}\int e^{x}\sec^{2}(\frac{x}{2}).dx+\int e^{x}\sec^{2}(\frac{x}{2}).dx+\underbrace{\int e^{x}\tan(\frac{x}{2}).dx}_{(1)}\end{aligned}$$

برای حل ترم (۱) از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\begin{cases} u=\tan(\frac{x}{2})\\ e^{x}dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\frac{1}{2}\sec^{2}(\frac{x}{2})dx\\ e^{x}=v\end{cases}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$I = \frac{۱}{۲}\int e^x \sec^۲(\frac{x}{۲})dx + e^x \tan(\frac{x}{۲}) - \frac{۱}{۲}\int e^x \sec^۲(\frac{x}{۲})dx = e^x \tan(\frac{x}{۲}) + C$$

پاسخ مسالهٔ ٦)ج) با مقایسه انتگرال داده شده با $\int \sin^m x.\cos^n x$ می‌توان نوشت $m = ۵$ و $n = \frac{۳}{۲}$؛ که چون m و n اعداد گویا و m عددی فرد است از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می‌کنیم. بنابراین $dt = -\sin t\, dt$ و

$$\int \sin^۵ x \cos^{۳/۲} x.dx = \int \sin x(\sin^۲ x)^۲ \cos^{۳/۲} x.dx = -\int (۱ - t^۲)^۲.t^{۳/۲}.dt$$

که انتگرال فوق یک انتگرال دو جمله‌ای دیفرانسیلی با $m = \frac{۳}{۲}$ و $n = ۲$ و $p = ۲$ می‌باشد که چون p عددی صحیح و مثبت است بنابراین $(۱ - t^۲)^۲$ را بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned} I &= -\int (۱ - ۲t^۲ + t^۴).t^{۳/۲}.dt = \frac{-۲}{۵}t^{۵/۲} + \frac{۴}{۹}t^{۹/۲} - \frac{۲}{۱۳}t^{۱۳/۲} + C \\ &= \frac{-۲}{۵}\sqrt{\cos^۵ x} + \frac{۴}{۹}\sqrt{\cos^۹ x} - \frac{۲}{۱۳}\sqrt{\cos^{۱۳} x} + C \end{aligned}$$

پاسخ مسالهٔ ۷) چون تمام جملات سری داده شده مثبت هستند، پس کافی است نشان دهیم که این سری از بالا کراندار است برای این منظور

$$۰ \le \sum_{n=۱}^{m} \frac{\sin\frac{۱}{n}}{\sqrt{n^۳ + ۱}} \le \sum_{n=۱}^{m} \frac{\sin\frac{۱}{n}}{\sqrt{n^۳ + ۱}} \le \sum_{n=۱}^{m} \frac{۱}{\sqrt{n^۳ + ۰}} = \sum_{n=۱}^{m} \frac{۱}{n^{۳/۲}}$$

اما مجموع سمت راست $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۳/۲}}$ که یک سری توانی با توان $k > ۱$ می‌باشد، همگرا می‌باشد. پس سری مورد نظر همگرا می‌باشد.

پاسخ مسأله ۸) فرض کنیم $x \neq ۰$، در این صورت $F_k(x) = x^k \sin\left(\frac{۱}{x}\right)$. فرض کنیم $G_k(x) = x^k \cos\left(\frac{۱}{x}\right)$، آنگاه

$$\begin{aligned} F'_k(x) &= kx^{k-۱}\sin\left(\frac{۱}{x}\right) - x^{k-۲}\cos\left(\frac{۱}{x}\right) = kF_{k-۱} - G_{k-۲} \\ G'_k(x) &= kx^{k-۱}\cos\left(\frac{۱}{x}\right) + x^{k-۲}\sin\left(\frac{۱}{x}\right) = kG_{k-۱} + F_{k-۲} \\ F''_k(x) &= k((k-۱)F_{k-۲} - G_{k-۳}) + ((k-۲)G_{k-۳} + F_{k-۴}) \end{aligned}$$

در نتیجه با k بار مشتقگیری از $F_{۲k}(x)$ جمله‌ای شامل $F_۰(x)$ یا $G_۰(x)$ ظاهر می‌گردد، که حد هیچکدام در $x = ۰$ وجود ندارد؛ بنابراین $F_{۲k}(x)$ در $k = ۰$ مشتق مرتبه $(k - ۱)$ ام است. در حالی که در مشتق $(k - ۱)$ ام $F_{۲k}(x)$ همهٔ جملات مضربی از $F_a(x)$ یا $G_a(x)$ است که $a = ۱, ۲, \cdots, ۲k$. بنابراین، حد این مشتق در $x = ۰$ برابر صفر است؛ و لذا $F_{۲k}(x)$ دارای مشتق مرتبه k ام نمی‌باشد.

امتحان پانزدهم

(۱) نشان دهید که معادلهٔ $x = \sinh(۲x)$ فقط دارای یک ریشه در فاصلهٔ $(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ می‌باشد.

(۲) y'_x را در هر یک از مورد زیر بیابید:

$$\text{الف)}\quad \begin{cases} x = ۲\ln(\cot t) \\ y = \tan t + \cot t \end{cases} \qquad \text{ب)}\quad y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$$

(۳) مجموعه نقاطی از صفحهٔ مختلط را بیابید که در نامساوی $|z + ۲| > ۱ + |z - ۲|$ صدق کند.

(۴) هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید:

$$\text{الف)} \int \frac{۱ + \ln x}{۳ + x\ln x}dx \quad \text{ب)} \int_{۰}^{\infty} e^{-x}\cos(۲x).dx \quad \text{ج)} \int \frac{\cos x}{۱ - \sin x}dx$$

(۵) حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی نمایشهای توابع $y = ۱ + x^۲$ و $y = ۲$ را حول محور x بیابید.

(٦) اگر $F(x) = \int_{۱}^{x} e^{t^۲}.dt$ باشد آنگاه $\int_{۰}^{۱} F(t)dt$ را محاسبه نمائید.
(راهنمایی: می‌توانید از روش جزء به جزء استفاده کنید.)

(۷) در همگرای یا واگرایی انتگرال $\int_{۱}^{\infty} \frac{x + ۱}{\sqrt{x^۳}}dx$ بحث کنید.

(۸) شعاع و فاصلهٔ همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n \frac{x^{۲n}}{x^{۲n}(n!)^۲}$ را محاسبه نمائید.

پاسخ مسایل

پاسخ مسالهٔ ۱) تابع $f(x) = \sinh(۲x) - x$ را بربازهٔ $(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ در نظر می‌گیریم برای این منظور داریم:

$$f'(x) = ۲\cosh(۲x) - ۱ = ۲\frac{e^{۲x} + e^{-۲x}}{۲} - ۱ = (e^{۲x} - e^{-۲x})^۲ + ۱ > ۰$$

پس تابع $y = f(x)$ بر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{-۱}{۲}$ اکیداً صعودی است؟ نتیجتاً، تابع $y = f(x)$ هر مقداری را یک و تنها یکبار می‌توانه اختیار کند بنابراین حداکثر یکبار می‌تواند صفر شود. یعنی معادلهٔ داده شده حداکثر دارای یک جواب است. بعلاوه $f(۰) = \sinh(۰) = ۰$. پس $y = F(x)$ دقیقاً یک ریشه دارد و بنابراین، معادلهٔ داده شده تنها یک جواب دارد.

پاسخ مسالهٔ ۲) الف) به کمک فرمول مشتق تابع پارامتری داریم:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t} - \frac{1}{\sin^2 t}}{2\,\frac{1/\cos^2 t}{\tan t}} = \frac{\frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin^2 . \cos^2 t}}{\frac{2}{\sin t \cos t}} \\ &= \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{2 \sin t \cos t} = \frac{-\cos 2t}{\sin 2t} = -\cot 2t \end{aligned}$$

پاسخ مسالهٔ ۲) ب) به کمک فرمول $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)' = \frac{(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1+\frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1+\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

پاسخ مسالهٔ ۳) فرض کنیم $z = x + iy$ باشد در اینصورت داریم:

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} > \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + 1$$

با به توان دو رسانیدن دو طرف نامساوی داریم:

$$\begin{aligned} &(x+2)^2 + y^2 > (x-2)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-2)^2+y^2} + 1 \\ &\Rightarrow\ 8x - 1 > 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \end{aligned}$$

اگر مجدداً دو طرف را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت:

$$64x^2 - 16x + 1 > 4((x-2)^2 + y^2)\ \Rightarrow\ 60x^2 - 4y^2 > 15$$

که حاصل بیرون یک هذلولی می‌باشد.

پاسخ مسالهٔ ۴) الف) فرض کنیم $u = 3 + x\ln x$، در اینصورت $du = (1+\ln x)dx$ و بنابراین:

$$\int \frac{1+\ln x}{3 + x\ln x}.dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|3 + x\ln x| + C$$

پاسخ مسالهٔ ۴) ب) ابتدا انتگرال نامعین را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int e^{-x}\cos(2x)dx &= \int e^{-x}\mathrm{Re}(e^{2xi})dx = \mathrm{Re}\Big(\int e^{(2i-1)}.dx\Big) \\ &= \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{2i-1}e^{(2i-1)x}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\frac{2i+1}{-4-1}.e^{-x}.e^{2xi}\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-e^{-x}}{۵}\mathrm{Re}[(۲i+۱)(\cos ۲x + i\sin ۲x)] \\ &= \frac{-۱}{۵}e^{-x}\mathrm{Re}\Big[۲i\cos ۲x - ۲\sin ۲x + \cos ۲x + i\sin ۲x\Big] \\ &= \frac{-۱}{۵}e^{-x}\mathrm{Re}\Big[(۲\cos ۲x + \sin ۲x)i + (\cos ۲x - ۲\sin ۲x)\Big] \\ &= \frac{-۱}{۵}e^{-x}\big(\cos ۲x - ۲\sin ۲x\big) + C \end{aligned}$$

حال مقدار انتگرال داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_۰^\infty e^{-x}\cos(۲x).dx &= \lim_{a\to+\infty}\int_۰^a e^{-x}\cos(۲x).dx \\ &= \lim_{a\to\infty}\frac{-۱}{۵}\Big[e^{-x}(\cos ۲x - ۲\sin ۲x)\Big]_۰^a \\ &= \frac{-۱}{۵}\lim_{a\to\infty}\frac{\cos ۲a - ۲\sin ۲a}{e^a} + \frac{۱}{۵} \overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۵} \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) عبارت $-۳ < \cos ۲a - ۲\sin ۲a < ۳$ است در حالیکه مخرج آن بی کران می‌باشد، در نتیجه حد آن برابر صفر می‌باشد.

پاسخ مسالهٔ ۴) ج) فرض می‌کنیم $u = ۱ - \sin x$، در اینصورت $du = -\cos x dx$ پس داریم:

$$\int \frac{\cos x}{۱-\sin x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|۱-\sin x| + C$$

پاسخ مسالهٔ ۵) ابتدا منحنی داده شده را برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = ۲ \\ y = ۱ + x^۲ \end{cases} \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

حجم خواسته شده V برابر است با حجم حاصل از دوران $y = ۲$ که $-۱ \le x \le ۱$ حول محور xها ($V_۱$) منهای حجم حاصل از دوران $y = x^۲ + ۱$ که $-۱ \le x \le ۱$ حول محور x ها ($V_۲$). بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} V &= V_۱ - V_۲ = \pi\int_{-۱}^{۱}(۲)^۲dx - \pi\int_{-۱}^{۱}(x^۲+۱)^۲dx \\ &= \pi\Big[۴x\Big]_۰^۱ - \pi\left[\frac{x^۵}{۵} + ۲\frac{x^۳}{۳} + x\right]_{-۱}^{۱} = \frac{۶۴}{۱۵}\pi \end{aligned}$$

پاسخ مسالهٔ ۶) در انتگرال $\int_۰^۱ F(t)dt$ فرض می‌کنیم $u = F(t)$ و $dv = dt$، در نتیجه $du = F'(t)\,dt$، $v = t$ و

$$\int_۰^۱ F(t)dt = \Big[tf(t)\Big]_۰^۱ - \int_۰^۱ tF'(t)dt = F(۱) - \int_۰^۱ t.e^{(t^۲)}.dt$$

$$= F(1) - \left[\frac{1}{2}e^{(t^2)}\right]_0^1 = \int_1^1 e^{(t^2)}.dt - \frac{1}{2}(e^2-1) = \frac{1}{2}(1-e^2)$$

پاسخ مسالهٔ ۷) به کمک تعریف انتگرال ناسره داریم:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}.dx &= \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a x^{-3/2}(x+1)dx \\
&= \lim_{a\to\infty}\int_1^a (x^{-1/2}+x^{-3/2})dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}+\frac{x^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^a \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty}(2\sqrt{a}-\frac{2}{\sqrt{a}}) = \infty
\end{aligned}$$

پس انتگرال داده شده واگرا می‌باشد.

پاسخ مسالهٔ ۸) چون ضریب x^{2n} در سری داده شده برابر $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$ است داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}}{\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{2^{2n}\times 2^2[(n+1)!]^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4(n+1)^2} = 0
\end{aligned}$$

بنابراین $R=\infty$، لذا سری داده شده بر کل $\mathbb{R}$ همگرا می‌باشد.

امتحان شانزدهم

(۱) معادلهٔ $z^{۴} = \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{۴}) - i\sin(\frac{\pi}{۴})}{\cos(\frac{\pi}{۳}) - i\sin(\frac{\pi}{۳})}\right)^{۱۲} - i$ را حل کنید.

(۲) قضیهٔ رل را بیان واثبات نموده،همچنین با بکارگیری قضیهٔرل برای تابع $g(x) = (f(x) - f(a))(x - b)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ نشان دهید که:

$$\exists C \in [a, b) : F'(c) = \frac{F(b) - f(a)}{b - a}$$

(۳) عدد k را طوری پیدا کنید که تابع داده شده زیر در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته باشد.

$$F(x) = \begin{cases} (۱ - e^{۳x})^{x} & x < ۰ \\ ۱ - k & x \geq ۰ \end{cases}$$

(۴) حدهای زیر را محاسبه نمائید:

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{۱}{n}) + ۲\sin(\frac{۲}{n}) + \cdots + n\sin(\frac{n}{n})}{n^{۲}}$ ب) $\lim_{x\to ۰^+} (\sin x)^{۱/\ln x}$

(۵) حجم حاصل از دوران سطح محدود به $y = \frac{\pi}{۳}$ و $y = ۰$ و $x = ۰$ و $x = \sec y$ را حول محور y ها بدست آورید.

(٦) هر یک از انتکراسهای زیر را محاسبه نمائید:

الف) $\int \sin(\ln x)dx$ ب) $\int \arctan(\sqrt{x}).dx$

(۷) طول کمان منحنی پارامتری زیر را محاسبه نمائید:

$$x = ۳\cos^{۳} t, \quad y = ۳\sin^{۳} t, \quad ۰ \leq t \leq \pi$$

(۸) همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را تحقیق نمائید:

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^n}{۴^n (n!)}$ ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{۱ + n^{۲}}$

پاسخ مسایل

پاسخ مسالهٔ ۱) برای حل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} z^{۴} &= \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{۴}) - i\sin(\frac{\pi}{۴})}{\cos(\frac{\pi}{۳}) - i\sin(\frac{\pi}{۳})}\right]^{۱۲} - i = \left[\frac{e^{-\pi i/۴}}{e^{-\pi i/۳}}\right]^{۱۲} - i \\ &= \frac{e^{-۴i\pi}}{e^{-۳i\pi}} - i = \frac{e^{۱۲(-۴i\pi)}}{e^{۱۲(-۳i\pi)}} - i = e^{-\pi i} - i = -۱ - i \end{aligned}$$

با فرض $u = -۱ - i$ می‌توان نوشت $r = |u| = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲}$. چون ضریب i در u منفی است، پس آرگومان θ آن در ربع سوم قرار دارد، و لذا

$$\theta = \pi + \arctan(\frac{-۱}{-۱}) = \pi + \frac{\pi}{۴} = \frac{۵\pi}{۴}$$

بنابرین $z^۴ = \sqrt{۲}e^{۵\pi i/۴}$ و

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[۸]{۲}e^{\frac{۵\pi/۴+۲k\pi}{۴}i} \qquad\qquad k = ۰, ۱, ۲, ۳ \\ &= \sqrt[۸]{۲}e^{(\frac{۵+۸k}{۱۶})\pi i} \\ &= \begin{cases} \sqrt[۸]{۲}e^{۵\pi i/۱۶} = \sqrt[۸]{۲}(\cos(\frac{۵\pi}{۱۶}) + i\sin(\frac{۵\pi}{۱۶})) & k = ۰ \\ \sqrt[۸]{۲}e^{۱۳\pi i/۱۶} = \sqrt[۸]{۲}(\cos(\frac{۱۳\pi}{۱۶}) + i\sin(\frac{۱۳\pi}{۱۶})) & k = ۱ \\ \sqrt[۸]{۲}e^{۲۱\pi i/۱۶} = -\sqrt[۸]{۲}e^{۵\pi i/۱۶} & k = ۲ \\ \sqrt[۸]{۲}e^{۲۹\pi i/۱۶} = -\sqrt[۸]{۲}e^{۱۳\pi i/۱۶} & k = ۳ \end{cases} \end{aligned}$$

پاسخ مسالهٔ ۲) برای مشاهده صورت و اثبات قضیه رل به پاسخ مساله ۲ از امتحان دوم مراجعه شود. چون حکم داده شده در قسمت بعدی مسأله همان قضیه مقدار میانگین است برای مشاهده اثبات آن نیز به قسمت مراجعه شود.

پاسخ مسالهٔ ۳) شرط پیوستگی تابع در $x = ۰$ این است که حد چپ و حد راست با مقدار تابع در نقطهٔ $x = ۰$ برابرباشد. برای حل می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (۱ - e^{۳x})^x = ۰^۰$$

با فرض $f(x) = (۱ - e^{۳x})^x$ و $A = \lim f(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x\to ۰^-} x\ln(۱ - e^{۳x}) = ۰ \times \infty = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\ln(۱ - e^{۳x})}{\frac{۱}{x}} \overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to ۰^-} \frac{\frac{-۳e^{۳x}}{۱-e^{۳x}}}{\frac{-۱}{x^۲}} \\ &= ۳\Big(\lim_{x\to ۰^-} e^{۳x}\Big)\Big(\lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲}{۱ - e^{۳x}}\Big) \overset{\text{هـ}}{=} ۳ \times ۱ \times \lim \frac{۲x}{-۳e^{۳x}} = ۰ \end{aligned}$$

بنابراین $A = \lim_{x\to ۰^-} f(x) = e^۰ = ۱$. برای پیوستگی تابع در نقطه $x = ۰$ با توجه به اینکه $\lim_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰) = ۱ - k$ می‌باشد، داریم $۱ - k = ۱$ و لذا $k = ۰$. بنابراین شرط لازم و کافی برای پیوستگی تابع داده شده در نقطه $x = ۰$ این است که $k = ۰$.

پاسخ مسالهٔ ۴) الف)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{۱}{n}) + ۲\sin(\frac{۲}{n}) + \cdots + n\sin(\frac{n}{n})}{n^۲} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\left\{\frac{۱}{n}\sin\left(\frac{۱}{n}\right)+\frac{۲}{n}\sin\left(\frac{۲}{n}\right)+\cdots+\frac{n}{n}\sin\left(\frac{n}{n}\right)\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{۱-۰}{n}\sum_{k=۱}^{n}\left(۰+k\frac{۱-۰}{n}\right)\sin\left(۰+k\frac{۱-۰}{n}\right)\\
&= \int_{۰}^{۱} x\sin x dx = \Big[-x\cos x\Big]_{۰}^{۱}+\int_{۰}^{۱}\cos x dx\\
&= -\cos(۱)+\Big[\sin x\Big]_{۰}^{۱} = \sin(۱)-\cos(۱)
\end{aligned}$$

پاسخ مسالهٔ ۴) ب) گیریم $y=(\sin x)^{۱/\ln x}$ و $A=\lim\limits_{x\to ۰^+} y$ دراینصورت:

$$\begin{aligned}
\ln A &= \lim_{x\to ۰^+}\ln y = \lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\ln x}\times\ln(\sin x) = \lim\frac{\ln(\sin x)}{\ln x} \overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to ۰^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{۱}{x}}\\
&= \lim_{x\to ۰^+}\frac{x\cos x}{\sin x} \overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to ۰^+}\frac{\cos x - x\sin x}{\cos x} = \frac{۱-۰}{۱} = ۱
\end{aligned}$$

بنابراین $A=\lim\limits_{x\to ۰^+} y = e^{۱} = e$.

پاسخ مسالهٔ ۵) چون $۰\le y\le \frac{\pi}{۳}$، تابع $x=f(y)=\sec(y)=\frac{۱}{\cos y}$ بر این بازه مثبت و صعودی است. پس همواره نمودار آن در سمت راست y—محور قرار می‌گیرد. بر این اساس، حجم حاصل از دوران عبارت است از

$$V=\pi\int_{۰}^{\pi/۳}(\sec y)^{۲}\,dy = \pi\int_{۰}^{\pi/۳}\frac{dy}{\cos^{۲} y} = \pi\Big[\tan y\Big]_{۰}^{\pi/۳} = \pi\sqrt{۳}$$

پاسخ مسالهٔ ٦) الف) با فرض $I=\int\sin(\ln x)\,dx$ و $t=\ln x$ داریم $x=e^t$، $dx=e^t.dt$ و

$$I=\int\sin(\ln x)dx=\int\sin(t).e^t.dt$$

با فرض $u=e^t$ و $dv=\sin t\,dt$ داریم $du=e^t\,dt$، $v=-\cos t$ و

$$I=\int udv = uv-\int vdu = -e^t\cos t+\int e^t\cos t.dt$$

مجدداً با فرض $u=e^t$ و $dv=\cos t\,dt$ داریم $du=e^t\,dt$، $v=\sin t$ و

$$\begin{aligned}
&I=-e^t\cos t+\left(e^t\sin t-\int e^t\sin t\,dt\right)=e^t\sin(t)-e^t\cos t - I\\
&\Rightarrow\ I=\frac{۱}{۲}(e^t\sin(t)-e^t\cos(t))=\frac{x}{۲}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))
\end{aligned}$$

پاسخ مسالهٔ ٦) ب) برای مشاهده جواب به پاسخ مسأله ۲ از امتحان دوم مراجعه شود.

پاسخ مسالهٔ ۷) با توجه به فرمول محاسبه طول قوس یک منحنی پارامتری:

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_{۰}^{\pi} \sqrt{[۳(\cos^{۳} t)']^{۲} + [۳(\sin^{۳} t)']^{۲}}dt \\
&= \int_{۰}^{\pi} \sqrt{(-۹ \sin t \cos^{۲} t)^{۲} + (۹ \cos t \sin^{۲} t)^{۲}}dt \\
&= ۹ \int_{۰}^{\pi} |\sin t \cos t| \sqrt{\cos^{۲} t + \sin^{۲} t} dt = ۹ \int_{۰}^{\pi} |\sin t \cos t| dt \\
&\overset{(۱)}{=} ۱۸ \int_{۰}^{\pi/۲} \sin t \cos t dt = ۱۸ \left[\frac{\sin^{۲} t}{۲}\right]_{۰}^{\pi/۲} = ۹
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) چون $\sin t \cos t$ بر بازهٔ $[\frac{\pi}{۲}, \pi]$ منفی است، انتگرال را تنها بر بازهٔ $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ محاسبه نموده و حاصل را دو برابر می‌کنیم.

پاسخ مسالهٔ ۸) الف) برای پاسخ مسأله از آزمون نسبت استفاده می‌نمائیم:

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n + ۱}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{(n+۱)^{n+۱}}{۴^{n+۱}(n+۱)!}|}{|\frac{n^n}{۴^n n!}|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+۱)^{n+۱}}{۴(n+۱)n^n} = \frac{۱}{۴}. \lim_{n\to\infty} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n = \frac{e}{۴}
\end{aligned}$$

چون $\ell = \frac{e}{۴} < ۱$، پس سری مذکور همگرا می‌باشد.

پاسخ مسالهٔ ۸) ب) فرض کنیم $f(x) = \frac{e^{\arctan x}}{۱ + x^{۲}}$. روشن است $f(x) \geq ۰$ و

$$f'(x) = \frac{(۱ + x^{۲})\frac{۱}{۱+x^{۲}}e^{\arctan x} - ۲xe^{\arctan x}}{(۱ + x^{۲})^{۲}} = \frac{۱ - ۲x}{(۱ + x^{۲})^{۲}}e^{\arctan x}$$

بر بازهٔ $[۱, \infty]$ منفی است، پس f نزولی است و لذا می‌توان از آزمون انتگرال استفاده نمود. اما:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{۱}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{۱}^{b} \frac{a^{\arctan x}}{۱ + x^{۲}}dx \overset{(۱)}{=} \lim_{b\to\infty} \int_{\pi/۴}^{\arctan b} e^u.du \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[e^u\right]_{\pi/۴}^{\arctan b} = -e^{\pi/۴} + \lim_{b\to\infty} e^{\arctan b} = -e^{\pi/۴} + e^{\pi/۲}
\end{aligned}$$

در (۱) فرض شده است $u = \arctan x$ و $\begin{array}{c|cc} x & ۱ & b \\ \hline u & \pi/۴ & \arctan b \end{array}$. پس چون انتگرال I، همگرا است، سری داده شده نیز همگرا می‌باشد.

امتحان هفدهم

۱) معادله $z^۳ + z^۲ + z + ۱ = ۰$ را در اعداد مختلط حل کنید.

۲) حدهای زیر را بدست آورید:

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{۲n}\left(۱ + \cos\left(\frac{\pi}{۲n}\right) + \cos\left(\frac{۲\pi}{۲n}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{(n-۱)\pi}{۲n}\right)\right)$

ب) $\lim_{n\to ۰^+} \left(\frac{۱}{x}\right)^{\sin x}$

۳) برای $۰ < h < ۱$ ثابت کنید: $h < \ln\left(\frac{۱}{۱-h}\right) < \frac{h}{۱-h}$

۴) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int \frac{dx}{\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۴]{x}+۱)}$ ۲) $\int x^۳ \ln x \, dx$ ۳) $\int \frac{dx}{۳+۵\cos x}$ ۴) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

۵) طول قوس منحنی $y = \frac{x^۲}{۴} - \frac{۱}{۲}\ln x$ که $۱ \le x \le e$ را بدست آورید.

۶) همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را بررسی کنید:

۱) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n(\ln n)^۲}$ ۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n^۲}$

۷) شعاع و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{۲^n.\sqrt{n}}$ را بدست آورید.

پاسخ مسایل

پاسخ ۱) طرفین تساوی را در $z - ۱$ ضرب می کنیم، حاصل $z^۴ - ۱ = ۰$ می‌شود. پس کافی است ریشه‌های چهارم یک را پیدا کنیم: $z^۴ = ۱$ یا $z = \sqrt[۴]{۱}$. اما یک در نمایش قطبی $۱ = ۱e^{۰i}$ است. بنابراین

$$z = \sqrt[۴]{۱e^{۰i}} = \exp\left(\frac{۰ + ۲k\pi}{۴}i\right) = \exp\left(k\frac{\pi}{۲}i\right) = \left(\exp\left(\frac{\pi i}{۲}\right)\right)^k = i^k$$

که در آن $k = ۰, ۱, ۲, ۳$. اما $i^۰ = ۱$، $i^۱ = i$، $i^۲ = -۱$، $i^۳ = -i$ که $z = ۱$ مورد قبول است، زیرا در معادلهٔ اول صدق نمی‌کند، و سایر جوابها در آن صدق می‌کنند. پس جواب مساله عبارت است از -۱، i و $-i$.

پاسخ ۲–۱) با استفاده از تعریف ریمان برای انتگرال معین،

$$\begin{aligned} \text{حد} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{۲n}\sum_{i=۰}^{n-۱}\cos\left(i\frac{\pi}{۲n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{۲n}\sum_{i=۰}^{n-۱}\cos\left\{\frac{۱}{۲}\left(۰ + i\frac{\pi-۰}{n}\right)\right\} \\ &= \frac{۱}{۲}\int_۰^{\pi}\cos\left(\frac{x}{۲}\right)dx = \sin\left(\frac{x}{۲}\right)\Big|_۰^{\pi} = ۱ \end{aligned}$$

پاسخ ۲—۲) از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} &= \exp\left\{\ln\left(\lim_{n\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}\right)\right\} = \exp\left\{\lim_{n\to 0^+}\sin x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\\ &= \exp\left\{-\lim_{n\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\sin x}\right\} \overset{\text{ه}}{=} \exp\left\{-\lim_{n\to 0^+}\frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x}\right\}\\ &= \exp\left\{\lim_{n\to 0^+}\tan x\frac{\sin x}{x}\right\} = \exp(0\times 1) = 1\end{aligned}$$

پاسخ ۳) فرض کنیم $f(x) = \ln(1-x)$ و $I=[0,h]$ که .. در این صورت f بر I پیوسته و f' بر $(0;h)$ موجود است. پس شرایط قضیهٔ لاگرانژ فراهم است. بنابراین، یک $c\in(0,h)$ ای هست که $f(h)-f(0)=f'(c).h$. بعبارت دیگر $\ln(1-h)-\ln 1 = \frac{1}{1-c}.h$؛ یا به صورت معادل

$$\ln\left(\frac{1}{1-h}\right) = \frac{h}{1-c} \qquad (1)$$

اما $0<c<h$، در نتیجه $1-h<1-c<1$ یا

$$1<\frac{1}{1-c}<\frac{1}{1-h}$$

پس با ضرب طرفین این نامساوی ها در $h>0$ و با استفاده از (1) داریم $h<\ln\left(\frac{1}{1-h}\right)=\frac{h}{1-c}<\frac{h}{1-h}$.

پاسخ ۴— ۱) با استفاده از روش جزء به جزء، با فرض $u=\ln x$ و $dv=x^3\,dx$ داریم $du=dx/x$ و $v=x^4/4$. پس

$$\int x^3.\ln x\,dx = \frac{x^4}{4}.\ln x - \int\frac{x^4}{4}.\frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4}.\ln x - \frac{x^4}{16}+C$$

پاسخ ۴— ۲) چون توان x در این انتگرال $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ است و کوچکترین مضرب مشترک ۳ و ۴ برابر ۱۲ است، پس فرض می کنیم $x=t^{12}$. در این صورت

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[4]{x}+1)} &= \int\frac{12t^{11}\,dt}{t^4(t^3+1)} = 12\int\frac{t^7\,dt}{t^3+1}\\ &\overset{(2)}{=} 12\int\left\{t^4-t+\frac{t}{t^3+1}\right\}dt\\ &\overset{(3)}{=} 12\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)+4\int\left(\frac{-1}{t+1}+\frac{t+1}{t^2-t+1}\right)dt\\ &= \frac{12t^5}{5}-6t^2-4\ln|t+1|+2\ln(t^2-t+1)\\ &\quad +4\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2t-1)\right)+C\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۲) از تقسیم $t^{۷}$ بر $t^{۳}+۱$ استفاده شده است و در (۳) از روش تفکیک کسر: فرض کنیم

$$\frac{۱۲t}{t^{۳}+۱}=\frac{A}{t+۱}+\frac{Bt+C}{t^{۲}-t+۱}$$

در نتیجه $(A+B)t^{۲}+(B+C-A)t+(A+C)=۱۲t$ و لذا $A=-۴$ و $B=C=۴$.

پاسخ ۴– ۳) از تغییر متغیر تانژانت نصف قوس استفاده می کنیم: $t=\tan(x/۲)$ در این صورت

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{۳+۵\cos x}&=\int\frac{\frac{۲\,dt}{۱+t^{۲}}}{۳+۵\frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}}}=\int\frac{dt}{۴-t^{۲}}\overset{(۴)}{=}\int\left\{\frac{۱/۴}{t-۲}+\frac{-۱/۴}{t+۲}\right\}dt\\&=\frac{۱}{۴}\ln|t-۲|-\frac{۱}{۴}\ln|t+۲|+C=\frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{t-۲}{t+۲}\right|+C\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۴) از تفکیک کسر استفاده نموده‌ایم.

پاسخ ۴– ۴) ابتدا صورت و مخرج را در e^{x} ضرب کرده، سپس e^{x} را متغیر جدید u می‌گیریم. در نتیجه

$$\int\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=\int\frac{e^{x}\,dx}{e^{۲x}+۱}=\int\frac{du}{u^{۲}+۱}=\tan^{-۱}(u)+C$$

پاسخ ۵) با توجه به فرمول طول قوس داریم

$$\begin{aligned}\ell&=\int_a^b\sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}}\,dx=\int_۱^e\sqrt{۱+\left(\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲x}\right)^{۲}}\,dx\\&=\frac{۱}{۲}\int_۱^e\sqrt{۲+x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}}\,dx=\frac{۱}{۲}\int_۱^e\sqrt{\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۲}}\,dx\\&=\frac{۱}{۲}\int_۱^e\left(x+\frac{۱}{x}\right)dx=\frac{۱}{۲}\left[\frac{x^{۲}}{۲}+\ln x\right]_۱^e=\frac{۱}{۴}(e^{۲}+۱)\end{aligned}$$

پاسخ ٦– ۱) از آزمون انتگرال با فرض $f(x)=۱/(x.(\ln x)^{۲})$ بر بازهٔ $[۲,+\infty]$ استفاده می‌کنیم. چون f نزولی و مثبت است و

$$\int_۲^\infty f(x)\,dx=\int_۲^\infty\frac{۱}{(\ln x)^{۲}}.d(\ln x)\overset{(۵)}{=}\int_{\ln ۲}^\infty\frac{du}{u^{۲}}=\left[\frac{۱}{u}\right]_{\ln ۲}^\infty=\frac{۱}{\ln ۲}$$

همگرا است، پس سری داده شده نیز همگرا است. در (۵) از تغییر متغیر $u=\ln x$ استفاده شده است.

پاسخ ٦–۲) از آزمون حد جملهٔ عمومی استفاده می‌کنیم. چون حد جمله عمومی

$$\lim\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n^{۲}}=\lim\left\{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}\right\}^{n}=\lim e^{n}=+\infty$$

مخالف صفر است، پس سری واگرا است.

پاسخ ۷) مرکز سری داده شده $x_0 = 0$ و ضریب جملهٔ x^n آن $a_n = 1/(2^n.\sqrt{n})$ است. پس اگر شعاع همگرایی سری را R بنامیم، آنگاه

$$R = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{\frac{1}{2^n.\sqrt{n}}}{\frac{1}{2^{n+1}.\sqrt{n+1}}} = \lim 2\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 2$$

پس سری بر $(-2,2)$ همگرا و بر $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$ واگرا است. اما اگر $x = -2$، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n.\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad (6)$$

که $x_n = 1/\sqrt{n}$ یک دنبالهٔ نزولی و همگرا به صفر است. پس بنابه آزمون لایبنیز سری (6) همگرا است. از طرفی اگر $x = 2$، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n.\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

که چون توان سمت راست $1/2 < 1$، پس سری مذکور واگرا است. یعنی در مجموع سری توانی داده شده تنها بر $[-2,2)$ همگرا است.

امتحان هجدهم

۱) فرض کنید $z = \dfrac{\cos(\pi/۴) + i\sin(\pi/۴)}{\cos(\pi/۳) + i\sin(\pi/۳)}$ باشد. اولاً عدد صحیح را طوری بیابید که z^n عددی حقیقی شود؟ سپس ریشه‌های دوم z را بدست آورید؟

۲) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

الف) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_۰^x e^{t^۲}\,dt\right)^۲}{\int_۰^x e^{۲t^۲}\,dt}$ ب) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{n}\cos^۲\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

۳) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ ۱-x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$، ثابت کنید f در $x_۰ = \frac{۱}{۲}$ پیوسته و در سایر نقاط. اعداد حقیقی ناپیوسته است؟ (مجموعه اعداد گویاست)

۴) طول قوس تابع $f(x) = \displaystyle\int_۰^x \sqrt{\tan^۲ t - ۱}\,dt$ را از $x = ۰$ تا $x = \frac{\pi}{۴}$ بیابید؟

۵) ناحیه محدود به دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$ و سهمی $y^۲ = ۳x$ را حول محور x دوران می‌دهیم، حجم حاصل را بیابید؟

۶) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید: (فقط به سه مورد پاسخ دهید)

الف) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$ ب) $\displaystyle\int \tan^{-۱}(\sqrt{x-۱})\,dx$

ج) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^۴\sqrt{۱+x^۲}}$ د) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{۱-x}}dx$

۷) همگرایی یا واگرایی سری و انتگرال زیر را بررسی کنید؟

الف) $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}\ln(n)}{n^۲}$ ب) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۳\sin(۲x) + ۵\cos(۴x)}{(x^۲+x+۱)}dx$

پاسخ مسایل

پاسخ ۱) با استفاده از فرمول اولر z^n برابر است با

$$\left(\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right)}\right)^n = \left(\frac{\cos\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) + i\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)}{\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) + i\sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)}\right)^n = \left(\frac{e^{۲\pi i/۳}}{e^{۳\pi i/۴}}\right)^n$$
$$= \left(e^{\pi i/۱۲}\right)^n = e^{n\pi i/۱۲} = \cos\left(\frac{n\pi}{۱۲}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{۱۲}\right)$$

پس در صورتی z^n حقیقی است که $\sin\left(\frac{n\pi}{۱۲}\right) = ۰$ یعنی باید $\frac{n\pi}{۱۲}$ مضربی صحیح از π باشد: $\frac{n\pi}{۱۲} = k\pi$ یا $n = ۱۲k$. و این یعنی، n مضربی از ۱۲ باید باشد.

در مورد ریشه های دوم z داریم:

$$\sqrt{z}=\sqrt{e^{\pi i/۱۲}}=\pm e^{\pi i/۲۴}=\pm\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{۲۴}\Big)+i\sin\Big(\frac{\pi}{۲۴}\Big)\Big)$$

پاسخ ۲) با استفاده از قاعده هوپیتال داریم

الف)
$$\lim\frac{\left(\displaystyle\int_۰^x e^{t^۲}\,dt\right)^۲}{\displaystyle\int_۰^x e^{۲t^۲}\,dt}\overset{\text{هـ}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{۲.e^{x^۲}.\displaystyle\int_۰^x e^{t^۲}\,dt}{e^{۲x^۲}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{۲\displaystyle\int_۰^x e^{t^۲}\,dt}{e^{x^۲}}\overset{\text{هـ}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{۲e^{x^۲}}{۲xe^{x^۲}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

ب)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{n}\cos^۲\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{b-a}{n}f\Big(۰+k\frac{b-a}{n}\Big)$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx=\int_۰^۱\cos^۲(\pi x)\,dx=\frac{۱}{۲}\int_۰^۱(۱+\cos(۲\pi x)\,dx$$
$$=\frac{۱}{۲}\Big[x+\frac{۱}{۲\pi}\sin(۲\pi x)\Big]_۰^۱=\frac{۱}{۲}$$

که در اینجا $a=۰$، $b=۱$ و $f(x)=\cos(\pi x)$.

پاسخ ۳) اولاً $f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}$ و در ثانی

$$\Big|f(x)-f\big(\frac{۱}{۲}\big)\Big|=\begin{cases}|x-\frac{۱}{۲}| & x\in\mathbb{Q}\\ |۱-x-\frac{۱}{۲}| & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=\Big|x-\frac{۱}{۲}\Big|$$

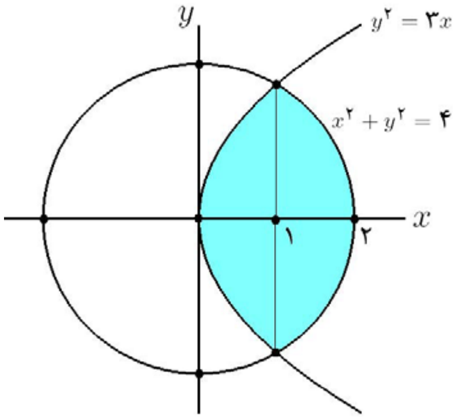
پس با فرض $\delta=\epsilon$ و $|x-\frac{۱}{۲}|<\delta$ داریم $|f(x)-f(\frac{۱}{۲})|<\epsilon$. یعنی f در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته است. اگر $x_۰$ نقطه‌ای بجز $\frac{۱}{۲}$ باشد، دو دنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ را می‌توان یافت که $\lim x_n=\lim y_n=x_۰$، $x_n\in\mathbb{Q}$ و $y_n\notin\mathbb{Q}$. در این صورت

$$\lim f(x_n)=\lim x_n=x_۰,\quad \lim f(y_n)=\lim(۱-y_n)=۱-x_۰.$$

در حالی که $۱-x_۰\neq x_۰$. پس f در $x_۰$ حد ندارد و لذا پیوسته نیست.

پاسخ ۴) با توجه به فرمول طول قوس داریم

$$\ell=\int_۰^{\pi/۴}\sqrt{۱+(f'(x))^۲}\,dx=\int_۰^{\pi/۴}\sqrt{۱+|\tan^۲x-۱|}\,dx$$
$$=\int_۰^{\pi/۴}|\tan x|\,dx=-\ln(\cos x)\Big|_۰^{\pi/۴}=-\ln\Big(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)=\frac{۱}{۲}\ln ۲$$



شکل ۱۲: پاسخ مسألهٔ ۴

پاسخ ۵) ابتدا دو منحی داده شده را بر خورد می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۴ \\ y^۲ = ۳x \end{cases} \Rightarrow x^۲ + ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۳ \pm ۵}{۲} = ۱, -۴$$

چون $y^۲ = ۳x$، پس $x \geq ۰$ و لذا تنها $x = ۱$ مورد قبول است. با توجه به شکل، مساله دو قسمت دارد: یکی دوران $y = \sqrt{۴ - x^۲}$ با $۱ \leq x \leq ۲$ حول x–محور و دیگری دوران $y = \sqrt{۳x}$ با $۰ \leq x \leq ۱$ حول x–محور. بنابراین

$$\begin{aligned} \text{حجم} &= \pi \int_۰^۱ (\sqrt{۳x})^۲\, dx + \int_۱^۲ (\sqrt{۴ - x^۲})^۲\, dx \\ &= \pi.۳.\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_۰^۱ + \pi.\left[۴x - \frac{x^۳}{۳}\right]_۱^۲ = \frac{۳}{۲}\pi + \frac{۵}{۳}\pi = \frac{۱۹}{۶}\pi \end{aligned}$$

پاسخ ۶– الف) صورت و مخرج کسر داده شده را بر $\cos x$ تقسیم نموده و از تغییر متغیر تانژانت $t = \tan x$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{dx}{۱ + \tan x}\, dx = \int \frac{d(\arctan t)}{t + ۱} = \int \frac{dt}{(t^۲ + ۱)(t + ۱)}$$

$$\overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۲} \int \left\{ \frac{۱ - t}{t^۲ + ۱} + \frac{۱}{t + ۱} \right\} dt = \frac{۱}{۲} \ln|t + ۱| - \frac{۱}{۴} \ln(t^۲ + ۱) + \frac{۱}{۲} \arctan t + C$$

$$= \frac{۱}{۲} \ln|\tan x + ۱| + \frac{۱}{۲} \cos x + \frac{x}{۲} + C$$

توضیح اینکه در (۱) از روش تفکیک کسر استفاده نموده‌ایم: فرض کنیم

$$\frac{۱}{(t^۲ + ۱)(t + ۱)} = \frac{At + B}{t^۲ + ۱} + \frac{C}{t + ۱}$$

با مخرج مشترک گرفتن از سمت راست. صورت کسر سمت راست

$$(At+B)(t+۱)+C(t^۲+۱)=۱$$

می‌شود. باید ضرایب توانهای مختلف x را صفر بگیریم. در نتیجه $A+C=۰$، $B=۰$ و $B+C=۱$. با حل این دستگاه داریم $A=-۱$، $B=۰$ و $C=۱$.

پاسخ ٦– ب) از روش جزء به جزء استفاده نموده، فرض می‌کنیم $dv=dx$ و $u=\tan^{-۱}(\sqrt{x+۱})$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int \tan^{-۱}(\sqrt{x+۱})\,dx &= x.\tan^{-۱}(\sqrt{x+۱})-\int x.d\big(\tan^{-۱}(\sqrt{x+۱})\big)\\
&= /\!/ -\int x.\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{۱+(x+۱)}\,dx \overset{(۱)}{=} /\!/ -\frac{۱}{۲}\int\frac{u^۲-۱}{u^۲+۱}\,du\\
&\overset{(۲)}{=} /\!/ -\frac{۱}{۲}\int\left\{۱-\frac{۲}{u^۲+۱}\right\}du = /\!/ -\frac{۱}{۲}u+\arctan u+C\\
&= (x+۱).\tan^{-۱}(\sqrt{x+۱})-\frac{۱}{۲}\sqrt{x+۱}+C
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) فرض شده است $u=\sqrt{x+۱}$. پس $x=u^۲-۱$ و $du=dx/۲\sqrt{x+۱}$. در (۲) از تقسیم صورت بر مخرج استفاده شده است.

پاسخ ٦– ج) فرض کنیم $x=tant$، آنگاه $dx=dt/\cos^۲ t$ و

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^۴\sqrt{x^۲+۱}} &= \frac{\cos^۳ t}{\sin^۴ t}\,dt=\int\frac{۱-\sin^۲ t}{\sin^۴ t}.\cos t\,dt\\
&\overset{(۱)}{=} \int\frac{۱-s^۲}{s^۴}\,ds=\int\left\{\frac{۱}{s^۴}-\frac{۱}{s^۲}\right\}ds=\frac{-۱}{۳s^۳}+\frac{۱}{s}+C\\
&\overset{(۲)}{=} \frac{-۱}{۳}\left(\frac{۱}{x}\sqrt{۱+x^۲}\right)^۳+\frac{۱}{x}\sqrt{۱+x^۲}+C
\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) فرض شده است $s=\sin t$ و در (۲) قرار داده‌ایم $\sin t=x/\sqrt{۱+x^۲}$.

پاسخ ٦– د) به کمک قاعدهٔ جزء به جزء، با فرض $u=\ln x$ و $dv=dx/\sqrt{۱-x}$ داریم $v=-۲\sqrt{۱-x}$ و

$$\begin{aligned}
\int\frac{\ln x}{\sqrt{۱-x}}\,dx &= -۲\sqrt{۱-x}.\ln x+۲\int\frac{۱}{x}\sqrt{۱-x}\,dx\\
&\overset{(۱)}{=} /\!/ +۲\int\frac{u}{۱-u^۲}.(-۲u\,du)= /\!/ +۴\int\left\{۱-\frac{۱}{۱-u^۲}\right\}du\\
&= /\!/ +۴u+۲\ln\left(\frac{۱-u}{۱+u}\right)+C
\end{aligned}$$

که در (۱) فرض شده است $u=\sqrt{۱-x}$، پس $x=۱-u^۲$ و $dx=-۲u\,du$.

پاسخ ۷– الف) چون

$$\lim x_n = \lim \frac{\ln(n)}{n^۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^۲} \overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{۱/x}{۲x} = \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{x^۳} = ۰$$

و x_n نزولی است،

$$\begin{aligned} x_{n+۱} \le x_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{۱}{(n+۱)^۲}.\ln(n+۱) \le \frac{۱}{n^۲}.\ln(n) \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left((n+۱)^{n^۲}\right) \le \ln\left(n^{(n+۱)^۲}\right) \Leftrightarrow (n+۱)^{n^۲} \le n^{(n+۱)^۲} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{n+۱}{n}\right)^{n^۲} \le n^{۲n+۱} \Leftrightarrow \left(\frac{n+۱}{n}\right)^{n} \le n^{۲+۱/n} \end{aligned}$$

حد سمت چپ e و حد سمت راست $+\infty$ است. پس $x_{n+۱} \le x_n$ درست است. بنابراین، بر اساس آزمون لایبنیتز، سری نوسانی داده شده همگرا است.

پاسخ ۷– ب) ابتدا می‌نویسیم

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۳\sin(۲x)+۵\cos(۴x)}{(x^۲+x+۱)}dx = \\ &= \quad \int_{-\infty}^{۰} \frac{۳\sin(۲x)+۵\cos(۴x)}{(x^۲+x+۱)}dx + \int_{۰}^{+\infty} \frac{۳\sin(۲x)+۵\cos(۴x)}{(x^۲+x+۱)}dx \\ &= \quad \int_{۰}^{+\infty} \frac{۳\sin(۲x)-۵\cos(۴x)}{(x^۲-x+۱)}dx + \int_{۰}^{+\infty} \frac{۳\sin(۲x)+۵\cos(۴x)}{(x^۲+x+۱)}dx \end{aligned}$$

از آزمون دیریکله استفاده می‌کنیم. در مورد انتگرال دوم، فرض کنیم $f(x) = ۳\sin(۲x)+۵\cos(۴x)$ و $g(x) = ۱/(x^۲+x+۱)$. در این صورت، به ازاء هر a ای

$$\left|\int_{۰}^{a} f(x)\,dx\right| = \left|\frac{۳}{۲}(۱-\cos(۲a)) + \frac{۵}{۴}\sin(۴a)\right| \le ۵$$

و لذا همگرا است. بعلاوه، g مشتق پذیر است و $\lim_{x\to\infty} g(x) = ۰$ و نیز

$$g'(x) = \frac{-۲x-۱}{(x^۲+x+۱)^۲} \le ۰ \quad \text{به ازای هر } x \ge -\frac{۱}{۲} \text{ ای}$$

پس اولین انتگرال همگرا است. به دلیل مشابه، انتگرال دوم نیز همگرا است. بنابراین، انتگرال مورد نظر، همگرا است.

چند فرمول مفید

$$\sin^{۲} x + \cos^{۲} x = ۱, \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x = \frac{۱}{\cos x},$$

$$\csc x = \frac{۱}{\sin x},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{۱ \mp \tan x \tan y}, \qquad \cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp ۱}{\cot y \pm \cot x},$$

$$\cos ۲x = \cos^{۲} x - \sin^{۲} x = ۱ - ۲\sin^{۲} x = ۲\cos^{۲} x - ۱,$$

$$\sin ۲x = ۲ \sin x \cos x, \qquad \tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^{۲} x},$$

$$\sin^{۲} x = \frac{۱ - \cos ۲x}{۲}, \qquad \cos^{۲} x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲},$$

$$c' = ۰, \qquad (cu)' = cu',$$

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (uv)' = u'v + v'u,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^{۲}}, \qquad (n^{n})' = nu'n^{n-۱},$$

$$(\sin u)' = u' \cos u, \qquad (\cos u)' = -u' \sin u,$$

$$(\tan u)' = u'\left(۱ + \tan^{۲} u\right), \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u},$$

$$(a^{u})' = (\ln a)\, u' a^{u}, \qquad (e^{u})' = u' e^{u},$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{۱ - u^{۲}}} = -(\arccos u)', \qquad (\arctan u)' = \frac{u'}{۱ + u^{۲}} = -(\mathrm{arccot} u)',$$

$$\int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx + C, \qquad \int (u \pm v)\, dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx + C,$$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du + C, \qquad \int u^{n}\, du = \frac{u^{n+۱}}{n+۱} + C, \ (n \neq -۱)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \qquad \int e^{u}\, du = e^{u} + C,$$

$$\int a^{u}\, du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C, \qquad \int \sin u\, du = -\cos u + C,$$

$$\int \cos u\, du = \sin u + C, \qquad \int \tan u\, du = \ln \sec u + C,$$

$$\int \cot u\,du = \ln \sin u + C, \qquad \int \frac{du}{\cos u} = \ln|\sec u + \tan u| + C,$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln|\csc u - \cot u| + C, \qquad \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \qquad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \mp a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \mp a^2}\right| + C, \qquad \int \sqrt{ax+b} = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + C,$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 \mp a^2}} = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{u + \sqrt{u^2 \mp a^2}}{u}\right|, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C,$$

$$f(-x) = f(x) \ \Rightarrow\ \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

$$f(-x) = -f(x) \ \Rightarrow\ \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{0}^{a} \cos^2 x\,dx = \int_{0}^{a} \sin^2 x\,dx = \frac{a}{2},$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}.\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}.$$